レポート課題

柏木 雅英

与えられた数 x の n 乗を計算することを考える。但し、使える演算は乗算のみとする。例えば $n=8$ のとき、

$$x^2 = x \times x, \quad x^3 = x^2 \times x, \quad \ldots, \quad x^8 = x^7 \times x$$

のように計算すると乗算が 7 回必要だが、

$$x^2 = x \times x, \quad x^4 = x^2 \times x^2, \quad x^8 = x^4 \times x^4$$

のようにすれば 3 回の乗算で済む。このように、$n = 2^m$ のときは $m = \log_2 n$ 回の計算で済むことは明らかであろう。

これを応用して、n を 2 進数で表現して計算する方法が考えられる。例えば $n = 11$ のとき、$11(10) = 1011(2)$ なので、

$$x^{11} = x^8 \times x^2 \times x$$

と書ける。よって、

$$x^2 = x \times x, \quad x^4 = x^2 \times x^2, \quad x^8 = x^4 \times x^4, \quad x^{10} = x^8 \times x^2, \quad x^{11} = x^{10} \times x$$

とすると、x^{11} は 5 回の乗算で計算できる。この計算の途中で出てくる数が、

$$x^2, x^4, x^8, x^{10}, x^{11}$$

なので、この方法を単に

$$(2, 4, 8, 10, 11)$$

と書くことにしよう。

ここで、x^{15} の計算を考える。上で書いた 2 進数法だと、

$$(2, 4, 8, 12, 14, 15)$$

で 6 回の乗算で計算できるが、実は

$$(2, 4, 5, 10, 15)$$

のように計算すれば 5 回で計算できる。x^{95} なら、2 進数法の

$$(2, 4, 8, 16, 32, 64, 80, 88, 92, 94, 95)$$

に対して、

$$(2, 4, 8, 16, 20, 21, 37, 74, 95)$$

という方法が存在する。

与えられた n に対して x^n を計算する乗算回数が最小の方法はどうなるか考察せよ。最小の方法を探索するプログラムを作成し、$n = 2015$ に対する最小の乗算回数を求めよ。