

問題

連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} 0.334 & 0.666 \\ 0.333 & 0.667 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考える。真の解は、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

ここで、真の解に近い近似解 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 1.01 \end{pmatrix}$ に対して残差 (左辺と右辺の差) を計算すると

$$\begin{pmatrix} 0.334 & 0.666 \\ 0.333 & 0.667 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.01 \\ 1.01 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

となるが、真の解とはかけ離れた解 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.8 \\ 0.1 \end{pmatrix}$ に対して残差を計算すると

$$\begin{pmatrix} 0.334 & 0.666 \\ 0.333 & 0.667 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.8 \\ 0.1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0018 \\ -0.0009 \end{pmatrix}$$

と、先の例より残差が小さくなってしまう。この現象が起きる原因について考察せよ。(この例は、残差が小さいことと解の精度が良いことは必ずしも一致しないという教訓になっている。)