数値解析のための数学的基礎

柏木 雅英
kashi@waseda.jp
http://verifiedby.me/

早稲田大学 基幹理工学部 応用数理学科

- 数値解析で知っていると便利な「関数解析の初歩の初歩」を学ぶ。
- 有限次元の $\mathbb{R}^n$ の話でも、関数解析の用語を用いると見通しがよくなる。

線形空間 (1)

線形空間

K を体とする。集合 X と体 K について、X が以下を満たすとき、X を線形空間 (linear space) またはベクトル空間 (vector space) と言う。

- 任意の $x, y \in X$ について、和 $x + y \in X$ が定義されて、
  - 全ての $x, y \in X$ について $x + y = y + x$
  - 全ての $x, y, z \in X$ について $(x + y) + z = x + (y + z)$ (結合法則)
  - ゼロ元 $0 \in X$ が存在し、全ての $x \in X$ について $x + 0 = x$
  - 全ての $x \in X$ について、逆元 $(-x) \in X$ が存在し、$x + (-x) = 0$
- 任意の数 $\alpha \in K$ と $x \in X$ に対し、スカラー (scalar) 倍 $\alpha x \in X$ が定義されて、
  - $1 \cdot x = x$
  - 全ての $\alpha, \beta \in K, x \in X$ について $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
  - 全ての $\alpha, \beta \in K, x \in X$ について $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
  - 全ての $\alpha \in K, x, y \in X$ について $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

- 簡単に言えば、「足し算とスカラー倍ができる集合」
- 体 K の正確な定義は次に述べるが、要は K が「スカラー」で、実数 $\mathbb{R}$、有理数 $\mathbb{Q}$、複素数 $\mathbb{C}$ などが代表的な例。大雑把には「加減乗除のできる集合」

線形空間 (2)

体 (field)

集合 K について、加法 $(+)$ と乗法 $(\times)$ の 2 つの二項演算が定義され、以下を満たすとき、K を体 (field) と呼ぶ。但し、$x \times y$ は xy と略記する。

- (加法に関する性質)
  - 任意の $x, y, z \in K$ について、結合法則 $x + (y + z) = (x + y) + z$ が成立する。
  - ある元 $0 \in K$ が存在して、任意の $x \in K$ について $x + 0 = 0 + x = x$ が成立する。
  - 任意の $x \in K$ について、マイナス元 $-x$ が存在して、$x + (-x) = (-x) + x = 0$ が成立する。
  - 任意の $x, y \in K$ について、交換法則 $x + y = y + x$ が成立する。
- (乗法に関する性質)
  - 任意の $x, y, z \in K$ について、結合法則 $x(yz) = (xy)z$ が成立する。
  - ある元 $1 \in K$ が存在して、任意の $x \in K$ について $1x = x1 = x$ が成立する。
  - 0 でない任意の $x \in K$ について、逆元 x^{-1} が存在して、$x(x^{-1}) = (x^{-1})x = 1$ が成立する。
  - 任意の $x, y \in K$ について、交換法則 $xy = yx$ が成立する。
- (加法と乗法に関する性質)
  - 任意の $x, y, z \in K$ について、分配法則 $x(y + z) = xy + xz$、$(x + y)z = xz + yz$ が成立する。

線形空間 (3)

線形空間の例

- 実数の集合 $\mathbb{R}$、有理数の集合 $\mathbb{Q}$、複素数の集合 $\mathbb{C}$。
- 2 次元平面内の方向を表す矢印の集合、あるいはそれと対応する座標 (x, y) の集合
- 3 次元空間内の方向を表す矢印の集合、あるいはそれと対応する座標 (x, y, z) の集合
- 実数を n 個束ねた $\mathbb{R}^n$ (いわゆる n 次元ユークリッド空間)
- 区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数全体の集合

距離空間

距離空間

集合 X の任意の元 $x, y \in X$ の間に距離 $d(x, y) \in \mathbb{R}$ が定義され、それが以下を満たすとき、X を距離空間と言う。

- 全ての $x, y \in X$ について、$d(x, y) \geq 0$、$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$。
- 全ての $x, y \in X$ について、$d(x, y) = d(y, x)$
- 全ての $x, y, z \in X$ について、$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式)

三角不等式のイメージ:

- 点 x から点 z へ向かうのに、直接向かう方が y へ寄り道するよりも近い。
- 三角形の斜辺の長さは他の 2 辺の長さの和よりも小さい。

ノルム空間

ノルム空間

X を体 $K=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を係数体とする線形空間とする。線形空間 X の全ての元 $x \in X$ に対してノルム $\|x\| \in \mathbb{R}$ が定められ以下を満たすとき、X をノルム空間と言う。

- $\|x\| \geq 0,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 全ての $x \in X, \alpha \in K$ について、$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- 全ての $x, y \in X$ について、$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$　(三角不等式)

係数体 K は、絶対値が定義できるような体であれば良い。例えば有理数など。

ノルム区間は距離空間

ノルム空間 X に対して、2 点 $x, y \in X$ 間の距離を

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

で定めると、X は距離空間となる。

ノルム空間 (3)

ノルム空間の例

- 線形空間 $\mathbb{R}$ の元 $x \in \mathbb{R}$ に対して、$\|x\| = |x|$
- $\mathbb{R}^2$ の元 (x, y) に対して、$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\mathbb{R}^n$ の元 x に対して、$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
- $\mathbb{R}^n$ の元 x に対して、$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$
- $\mathbb{R}^n$ の元 x に対して、$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$
- 区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数の集合 $C[a, b]$ の元 $x(t)$ に対して、

$$\|x(t)\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$$

- 区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数の集合 $C[a, b]$ の元 $x(t)$ に対して、

$$\|x(t)\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

p を使ったノルムに関しては、内積や角度の概念が必要な場合は、$p = 2$ とする。

線形作用素 (1)

線形作用素

X, Y を同じ係数体 K 上の線形空間とし、作用素 $A : X \to Y$ が以下を満たすとき、A を線形作用素 (linear operator) と呼ぶ。

- 全ての $x, y \in X$ について、$A(x+y) = Ax + Ay$
- 全ての $x \in X, \alpha \in K$ について、$A(\alpha x) = \alpha Ax$

有限次元のときの線形作用素

$X = \mathbb{R}^n$、$Y = \mathbb{R}^m$ のとき、線形作用素 $A : X \to Y$ は、$m \times n$ 行列 (m 行 n 列の行列) で書ける。

線形作用素 (2)

有界線形作用素

ノルム空間 X, Y、線形作用素 $A : X \to Y$ に対して、ある $M > 0$ が取れて、全ての $x \in X$ について

$$\|Ax\|_Y \le M\|x\|_X$$

が成立するとき、A は有界線形作用素 (bounded linear operator) であるという。

有限次元の場合は、線形作用素 (行列) は常に有界である。

有界線形作用素 = 連続

ノルム空間 X からノルム空間 Y への線形作用素について、その連続性と有界性は同値である。

(証明) 有界ならば連続であることを示す。$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \le M\|x_n - x\|$ より、$x_n \to x$ ならば $Ax_n \to Ax$ が言える。

連続ならば有界であることを背理法で示す。すなわち、有界でないならば連続でないことを示す。A が有界でないとすると、どんな自然数 n に対しても $\|Ax_n\| > n\|x_n\|$ を満たすような x_n が存在する。このとき、$y_n = \frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|}$ とおくと、$\|y_n\| = \frac{1}{n}$ なので $y_n \to 0 \quad (n \to \infty)$。しかし、$\|Ay_n\| = \frac{1}{n}\frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} > 1$ となり、$A0 = 0$ なのでこれは A が連続でないことを示している。

線形作用素 (3)

有界線形作用素のノルム

X, Y をノルム空間、$A : X \to Y$ を有界線形作用素とする。このとき、有界線形作用素 A のノルムを

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

で定める。

要するに、ノルムで測ったときの「最大拡大率」。有界線形作用素のノルムは、

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y$$

で求めることも出来る。

有界線形作用素のなす空間

ノルム空間 X からノルム空間 Y への全ての有界線形作用素の集合 $L(X, Y)$ に対して、

$$(A_1 + A_2)x = A_1 x + A_2 x$$
$$(\alpha A)x = \alpha A x$$

で作用素の和とスカラー倍を定めると、$L(X, Y)$ は線形空間となる。また、有界線形作用素 $A \in L(X, Y)$ に対して上記のようなノルムを定めると、$L(X, Y)$ はノルム空間となる。

線形作用素 (4)

行列のノルム

- 行列 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($m \times n$ 行列)、$A = (a_{ij})$ について、

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

- 行列 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($m \times n$ 行列)、$A = (a_{ij})$ について、

$$\|A\|_1 = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

- 行列 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($n \times n$ 行列)、$A = (a_{ij})$ について、

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

  ただし、$\rho()$ は行列の固有値のうち絶対値最大のものを表す。
- 行列 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($n \times n$ 行列)、$A = (a_{ij})$ に対して、

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

  をフロベニウスノルムと言う。これに関して、

$$\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{n} \|A\|_2$$

  が成立する。

バナッハ空間 (1)

コーシー列

距離空間 X における無限点列 $\{x_n\} = x_1, x_2, x_3, \cdots$ が以下を満たすとき、$\{x_n\}$ をコーシー列 (Cauchy sequence) と言う。
全ての実数 $\varepsilon > 0$ に対して、ある自然数 N が存在して、

$$n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

となる。

要するに、「どんどん動かなくなる」あるいは「いくらでも動かなくなる」列のこと。

完備距離空間

距離空間 X 内の全てのコーシー列 $\{x_n\}$ について、その収束先 $x^* \in X$ が存在するとき、X を完備距離空間 (complete metric space) と言う。

バナッハ空間

ノルム空間 X が、ノルムで定まる距離 $d(x, y) = \|x - y\|$ について完備であるとき、X をバナッハ空間 (Banach space) と言う。

バナッハ空間の例

- 実数 $\mathbb{R}$ の元 $x \in \mathbb{R}$ に対して、$\|x\| = |x|$ としたものはバナッハ空間。(実数は完備)
- 有理数 $\mathbb{Q}$ の元 $x \in \mathbb{Q}$ に対して、$\|x\| = |x|$ としたものはバナッハ空間ではない。(有理数は完備でない)
- $\mathbb{R}^n$ の元 x に対して、$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ $(1 \leq p < \infty)$ としたものはバナッハ空間。
- $\mathbb{R}^n$ の元 x に対して、$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ としたのはバナッハ空間。
- 区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数の集合 $C[a, b]$ の元 $x(t)$ に対して、

$$\|x(t)\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} \ (1 \leq p < \infty)$$

  としたものはバナッハ空間ではない。(これが有限と無限の違い)
- 区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数の集合 $C[a, b]$ の元 $x(t)$ に対して、

$$\|x(t)\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

  としたものはバナッハ空間。

縮小写像原理 (1)

縮小写像原理

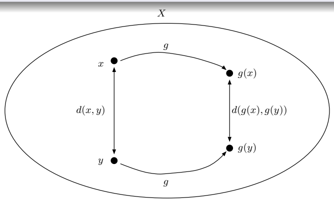
X を $d(x,y)$ を距離とする完備距離空間とし、$g: X \to X$ を全ての $x, y \in X$ に対して

$$d(g(x), g(y)) \leq \alpha d(x,y)$$

を満たすような写像とする。但し、$\alpha < 1$ とする。(このような g を縮小写像と言い、実数 α を縮小定数と言う。) このとき、以下が成立する:

1. $g(x) = x$ を満たす点 x^* (不動点と言う) が X に唯一存在する。
2. x_0 を X 内の任意の点とし、点列 $\{x_k\}$ を $x_{k+1} = g(x_k)$ で定めると、x_k は x^* に収束し、その収束速度は $d(x_k, x^*) \leq \dfrac{\alpha^k}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$ で表される。
3. X 内の任意の点 x_0 に対して、$d(x_0, x^*) \leq \dfrac{d(g(x_0), x_0)}{1-\alpha}$ が成立。

この定理を、縮小写像原理 (contraction mapping principle) またはバナッハの不動点定理 (Banach's fixed point theorem) と言う。



縮小写像原理 (2)

(証明) x_0 を X 内の任意の点とし、点列 $\{x_n\} \subset X$ を $x_{n+1} = g(x_n)$ で定める。縮小性の仮定により、$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1})$ が成立する。これを繰り返し用いて、
$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \leq \alpha^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots \leq \alpha^n d(x_1, x_0)$ となる。n, m $(m > n)$ を自然数とし、三角不等式を繰り返し適用して、$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_n) \leq$ $d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + d(x_{m-2}, x_n) \leq \cdots \leq d(x_m, x_{m-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n)$ 。
よって、

$$d(x_m, x_n) \leq (\alpha^{m-1} + \cdots + \alpha^n) d(x_1, x_0) = \frac{\alpha^n(1-\alpha^{m-n})}{1-\alpha} d(x_1, x_0) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$$

これにより、$m, n \to \infty$ のとき $d(x_m, x_n) \to 0$ となるので、点列 $\{x_n\}$ がコーシー列であることが分かる。X は完備なので、$\{x_n\}$ は収束先 $x^* \in X$ を持つ。ここで、$d(x^*, g(x^*)) \leq$ $d(x^*, x_n) + d(x_n, g(x^*)) = d(x_n, x^*) + d(g(x_{n-1}), g(x^*)) \leq d(x_n, x^*) + \alpha d(x_{n-1}, x^*)$ であるが、$n \to \infty$ のとき $x_n \to x^*$ 、$x_{n-1} \to x^*$ なので、$d(x^*, g(x^*)) = 0$ すなわち $g(x^*) = x^*$ である。以上により、x^* は g の不動点であることが示せた。
次に不動点の唯一性を示す。x^*, x^{**} を g の不動点と仮定する。縮小性の仮定より、
$d(x^*, x^{**}) \leq \alpha d(x^*, x^{**})$ が成立し、これを変形すると、$(1-\alpha) d(x^*, x^{**}) \leq 0$ となる。
$1 - \alpha > 0$ より、$d(x^*, x^{**}) = 0$、すなわち $x^* = x^{**}$ が分かる。

不動点への収束速度に関しては、$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^n(1-\alpha^{m-n})}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$ で $m \to \infty$ とすることにより、$d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(g(x_0), x_0)$ が成立する。この式で $n = 0$ とすると、
$d(x_0, x^*) \leq \frac{1}{1-\alpha} d(g(x_0), x_0)$ が成立する。

Picard-Lindelöf の定理 (1)

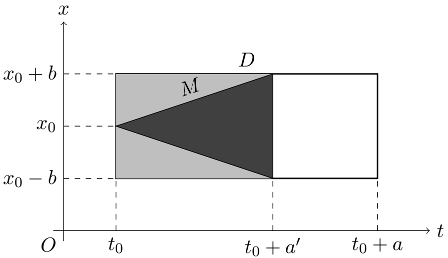
Picard-Lindelöf の定理

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^l, t \in \mathbb{R}$$
$$x(t_0) = x_0$$

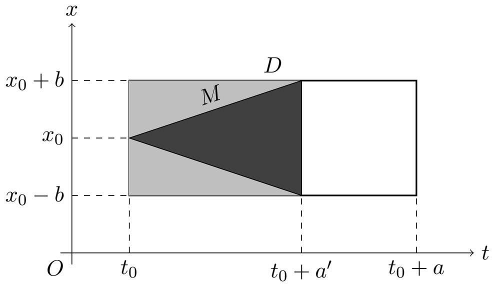
について、f がある領域 $D = \{\,(x,t) \mid t_0 \le t \le t_0 + a,\ \|x - x_0\| \le b\,\}$ で Lipschitz 条件

$$\|f(x_1,t) - f(x_2,t)\| \le L\|x_1 - x_2\|$$

を満たすとする。このとき、$M = \sup_{(x,t)\in D} \|f(x,t)\|$、$a' = \min(a, \frac{b}{M})$ とすると、$[t_0, t_0 + a']$ でただ一つの解を持つ。



Picard-Lindelöf の定理 (2)



Picard-Lindelöf の定理の証明の概略

$$P : x(t) \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(t), t)dt$$

とし、$D' = \{ (x,t) \mid t_0 \le t \le t_0 + a', \|x - x_0\| \le b \}$ とすると、

- P は D' 内の全ての連続関数を D' 内に移す。
- P は重み付き最大値ノルム $\|x(t)\| = \sup_{t_0 \le t \le t_0 + a'} e^{-2L(t-t_0)} \|x(t)\|$ を入れると縮小写像となる。
- よって、P の不動点は D' に唯一存在する。