

数値解析のための数学的基礎

柏木 雅英

kashi@waseda.jp

<http://verifiedby.me/>

早稲田大学 基幹理工学部 応用数理学科

数値解析のための数学的基礎

- 数値解析で知っていると便利な「関数解析の初歩の初歩」を学ぶ。
- 有限次元の $\mathbb{R}^n$ の話でも、関数解析の用語を用いると見通しがよくなる。

線形空間 (1)

線形空間

K を体とする。集合 X と体 K について、 X が以下を満たすとき、 X を **線形空間** (linear space) またはベクトル空間 (vector space) と言う。

- 任意の $x, y \in X$ について、和 $x + y \in X$ が定義されて、
 - 全ての $x, y \in X$ について $x + y = y + x$
 - 全ての $x, y, z \in X$ について $(x + y) + z = x + (y + z)$ (結合法則)
 - ゼロ元 $0 \in X$ が存在し、全ての $x \in X$ について $x + 0 = x$
 - 全ての $x \in X$ について、逆元 $(-x) \in X$ が存在し、 $x + (-x) = 0$
- 任意の数 $\alpha \in K$ と $x \in X$ に対し、スカラー (scalar) 倍 $\alpha x \in X$ が定義されて、
 - $1 \cdot x = x$
 - 全ての $\alpha, \beta \in K, x \in X$ について $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
 - 全ての $\alpha, \beta \in K, x \in X$ について $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
 - 全ての $\alpha \in K, x, y \in X$ について $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- 簡単に言えば、「**足し算とスカラー倍ができる集合**」
- **体 K** の正確な定義は次に述べるが、要は K が「スカラー」で、実数 $\mathbb{R}$ 、有理数 $\mathbb{Q}$ 、複素数 $\mathbb{C}$ などが代表的な例。大雑把には「**加減乗除のできる集合**」

線形空間 (2)

体 (field)

集合 K について、加法 (+) と乗法 ($\times$) の2つの二項演算が定義され、以下を満たすとき、 K を体 (field) と呼ぶ。但し、 $x \times y$ は xy と略記する。

- (加法に関する性質)

- 任意の $x, y, z \in K$ について、結合法則 $x + (y + z) = (x + y) + z$ が成立する。
- ある元 $0 \in K$ が存在して、任意の $x \in K$ について $x + 0 = 0 + x = x$ が成立する。
- 任意の $x \in K$ について、マイナス元 $-x$ が存在して、 $x + (-x) = (-x) + x = 0$ が成立する。
- 任意の $x, y \in K$ について、交換法則 $x + y = y + x$ が成立する。

- (乗法に関する性質)

- 任意の $x, y, z \in K$ について、結合法則 $x(yz) = (xy)z$ が成立する。
- ある元 $1 \in K$ が存在して、任意の $x \in K$ について $1x = x1 = x$ が成立する。
- 0でない任意の $x \in K$ について、逆元 x^{-1} が存在して、 $x(x^{-1}) = (x^{-1})x = 1$ が成立する。
- 任意の $x, y \in K$ について、交換法則 $xy = yx$ が成立する。

- (加法と乗法に関する性質)

- 任意の $x, y, z \in K$ について、分配法則 $x(y + z) = xy + xz$ 、 $(x + y)z = xz + yz$ が成立する。

線形空間 (3)

線形空間の例

- 実数の集合 $\mathbb{R}$ 、有理数の集合 $\mathbb{Q}$ 、複素数の集合 $\mathbb{C}$ 。
- 2次元平面内の方向を表す矢印の集合、あるいはそれと対応する座標 (x, y) の集合
- 3次元空間内の方向を表す矢印の集合、あるいはそれと対応する座標 (x, y, z) の集合
- 実数を n 個束ねた $\mathbb{R}^n$ (いわゆる n 次元ユークリッド空間)
- 区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数全体の集合

距離空間

集合 X の任意の元 $x, y \in X$ の間に距離 $d(x, y) \in \mathbb{R}$ が定義され、それが以下を満たすとき、 X を距離空間と言う。

- 全ての $x, y \in X$ について、 $d(x, y) \geq 0$ 、 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ 。
- 全ての $x, y \in X$ について、 $d(x, y) = d(y, x)$
- 全ての $x, y, z \in X$ について、 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式)

三角不等式のイメージ:

- 点 x から点 z へ向かうのに、直接向かう方が y へ寄り道するよりも近い。
- 三角形の斜辺の長さは他の2辺の長さの和よりも小さい。

ノルム空間

ノルム空間

X を体 $K = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を係数体とする線形空間とする。線形空間 X の全ての元 $x \in X$ に対してノルム $\|x\| \in \mathbb{R}$ が定められ以下を満たすとき、 X をノルム空間と言う。

- $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 全ての $x \in X, \alpha \in K$ について、 $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- 全ての $x, y \in X$ について、 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (三角不等式)

係数体 K は、絶対値が定義できるような体であれば良い。例えば有理数など。

ノルム空間は距離空間

ノルム空間 X に対して、2点 $x, y \in X$ 間の距離を

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

で定めると、 X は距離空間となる。

ノルム空間 (3)

ノルム空間の例

- 線形空間 $\mathbb{R}$ の元 $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $\|x\| = |x|$
- $\mathbb{R}^2$ の元 (x, y) に対して、 $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\mathbb{R}^n$ の元 x に対して、 $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- $\mathbb{R}^n$ の元 x に対して、 $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$
- $\mathbb{R}^n$ の元 x に対して、 $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$
- 区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数の集合 $C[a, b]$ の元 $x(t)$ に対して、

$$\|x(t)\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$$

- 区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数の集合 $C[a, b]$ の元 $x(t)$ に対して、

$$\|x(t)\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

p を使ったノルムに関しては、内積や角度の概念が必要な場合は、 $p = 2$ とする。

線形作用素 (1)

線形作用素

X, Y を同じ係数体 K 上の線形空間とし、作用素 $A: X \rightarrow Y$ が以下を満たすとき、 A を線形作用素 (linear operator) と呼ぶ。

- 全ての $x, y \in X$ について、 $A(x + y) = Ax + Ay$
- 全ての $x \in X, \alpha \in K$ について、 $A(\alpha x) = \alpha Ax$

有限次元のときの線形作用素

$X = \mathbb{R}^n$ 、 $Y = \mathbb{R}^m$ のとき、線形作用素 $A: X \rightarrow Y$ は、 $m \times n$ 行列 (m 行 n 列の行列) で書ける。

線形作用素 (2)

有界線形作用素

ノルム空間 X, Y 、線形作用素 $A: X \rightarrow Y$ に対して、ある $M > 0$ が取れて、全ての $x \in X$ について

$$\|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X$$

が成立するとき、 A は有界線形作用素 (bounded linear operator) であるという。

有限次元の場合は、線形作用素 (行列) は常に有界である。

有界線形作用素 = 連続

ノルム空間 X からノルム空間 Y への線形作用素について、その連続性と有界性は同値である。

(証明) 有界ならば連続であることを示す。 $\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\|$ より、 $x_n \rightarrow x$ ならば $Ax_n \rightarrow Ax$ が言える。

連続ならば有界であることを背理法で示す。すなわち、有界でないならば連続でないことを示す。 A が有界でないとする、どんな自然数 n に対しても $\|Ax_n\| > n\|x_n\|$ を満たすような x_n が存在する。このとき、 $y_n = \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|}$ とおくと、 $\|y_n\| = \frac{1}{n}$ なので $y_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)。しかし、 $\|Ay_n\| = \frac{1}{n} \frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} > 1$ となり、 $A0 = 0$ なのでこれは A が連続でないことを示している。

線形作用素 (3)

有界線形作用素のノルム

X, Y をノルム空間、 $A : X \rightarrow Y$ を有界線形作用素とする。このとき、有界線形作用素 A のノルムを

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

で定める。

要するに、ノルムで測ったときの「最大拡大率」。有界線形作用素のノルムは、

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y$$

で求めることも出来る。

有界線形作用素のなす空間

ノルム空間 X からノルム空間 Y への全ての有界線形作用素の集合 $L(X, Y)$ に対して、

$$\begin{aligned}(A_1 + A_2)x &= A_1x + A_2x \\ (\alpha A)x &= \alpha Ax\end{aligned}$$

で作用素の和とスカラー倍を定めると、 $L(X, Y)$ は線形空間となる。また、有界線形作用素 $A \in L(X, Y)$ に対して上記のようなノルムを定めると、 $L(X, Y)$ はノルム空間となる。

線形作用素 (4)

行列のノルム

- 行列 $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m \times n$ 行列)、 $A = (a_{ij})$ について、

$$\|A\|_{\infty} = \sup_{\|x\|_{\infty}=1} \|Ax\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

- 行列 $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m \times n$ 行列)、 $A = (a_{ij})$ について、

$$\|A\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

- 行列 $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \times n$ 行列)、 $A = (a_{ij})$ について、

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

ただし、 $\rho()$ は行列の固有値のうち絶対値最大のものを表す。

- 行列 $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \times n$ 行列)、 $A = (a_{ij})$ に対して、

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

をフロベニウスノルムと言う。これに関して、

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2$$

が成立する。

バナッハ空間 (1)

コーシー列

距離空間 X における無限点列 $\{x_n\} = x_1, x_2, x_3, \dots$ が以下を満たすとき、 $\{x_n\}$ をコーシー列 (Cauchy sequence) と言う。

全ての実数 $\varepsilon > 0$ に対して、ある自然数 N が存在して、

$$n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

となる。

要するに、「どんどん動かなくなる」あるいは「いくらでも動かなくなる」列のこと。

完備距離空間

距離空間 X 内の全てのコーシー列 $\{x_n\}$ について、その収束先 $x^* \in X$ が存在するとき、 X を完備距離空間 (complete metric space) と言う。

バナッハ空間

ノルム空間 X が、ノルムで定まる距離 $d(x, y) = \|x - y\|$ について完備であるとき、 X をバナッハ空間 (Banach space) と言う。

バナッハ空間 (2)

バナッハ空間の例

- 実数 $\mathbb{R}$ の元 $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $\|x\| = |x|$ としたものはバナッハ空間。(実数は完備)
- 有理数 $\mathbb{Q}$ の元 $x \in \mathbb{Q}$ に対して、 $\|x\| = |x|$ としたものはバナッハ空間ではない。(有理数は完備でない)
- $\mathbb{R}^n$ の元 x に対して、 $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ ($1 \leq p < \infty$) としたものはバナッハ空間。
- $\mathbb{R}^n$ の元 x に対して、 $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ としたものはバナッハ空間。
- 区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数の集合 $C[a, b]$ の元 $x(t)$ に対して、

$$\|x(t)\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$$

としたものは**バナッハ空間ではない**。(これが有限と無限の違い)

- 区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数の集合 $C[a, b]$ の元 $x(t)$ に対して、

$$\|x(t)\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

としたものは**バナッハ空間**。

縮小写像原理 (1)

縮小写像原理

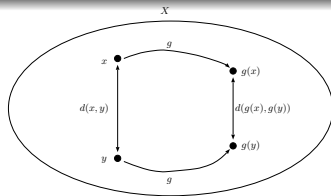
X を $d(x, y)$ を距離とする完備距離空間とし、 $g : X \rightarrow X$ を全ての $x, y \in X$ に対して

$$d(g(x), g(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

を満たすような写像とする。但し、 $\alpha < 1$ とする。(このような g を縮小写像と言い、実数 α を縮小定数と言う。) このとき、以下が成立する:

- 1 $g(x) = x$ を満たす点 x^* (不動点と言う) が X に唯一存在する。
- 2 x_0 を X 内の任意の点とし、点列 $\{x_k\}$ を $x_{k+1} = g(x_k)$ で定めると、 x_k は x^* に収束し、その収束速度は $d(x_k, x^*) \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} d(x_1, x_0)$ で表される。
- 3 X 内の任意の点 x_0 に対して、 $d(g(x_0), x_0) \leq \frac{d(g(x_0), x_0)}{1 - \alpha}$ が成立。

この定理を、縮小写像原理 (contraction mapping principle) またはバナッハの不動点定理 (Banach's fixed point theorem) と言う。



縮小写像原理 (2)

(証明) x_0 を X 内の任意の点とし、点列 $\{x_n\} \subset X$ を $x_{n+1} = g(x_n)$ で定める。縮小性の仮定により、 $d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1})$ が成立する。これを繰り返し用いて、 $d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \leq \alpha^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots \leq \alpha^n d(x_1, x_0)$ となる。 n, m ($m > n$) を自然数とし、三角不等式を繰り返し適用して、 $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + d(x_{m-2}, x_n) \leq \cdots \leq d(x_m, x_{m-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n)$ 。よって、

$$d(x_m, x_n) \leq (\alpha^{m-1} + \cdots + \alpha^n) d(x_1, x_0) = \frac{\alpha^n(1 - \alpha^{m-n})}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) < \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0)$$

これにより、 $m, n \rightarrow \infty$ のとき $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ となるので、点列 $\{x_n\}$ がコーシー列であることが分かる。 X は完備なので、 $\{x_n\}$ は収束先 $x^* \in X$ を持つ。ここで、 $d(x^*, g(x^*)) \leq d(x^*, x_n) + d(x_n, g(x^*)) = d(x_n, x^*) + d(g(x_{n-1}), g(x^*)) \leq d(x_n, x^*) + \alpha d(x_{n-1}, x^*)$ であるが、 $n \rightarrow \infty$ のとき $x_n \rightarrow x^*$ 、 $x_{n-1} \rightarrow x^*$ なので、 $d(x^*, g(x^*)) = 0$ すなわち $g(x^*) = x^*$ である。以上により、 x^* は g の不動点であることが示せた。

次に不動点の唯一性を示す。 x^*, x^{**} を g の不動点と仮定する。縮小性の仮定より、 $d(x^*, x^{**}) \leq \alpha d(x^*, x^{**})$ が成立し、これを変形すると、 $(1 - \alpha)d(x^*, x^{**}) \leq 0$ となる。 $1 - \alpha > 0$ より、 $d(x^*, x^{**}) = 0$ 、すなわち $x^* = x^{**}$ が分かる。

不動点への収束速度に関しては、 $d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^n(1 - \alpha^{m-n})}{1 - \alpha} d(x_1, x_0)$ で $m \rightarrow \infty$ とすることにより、 $d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(g(x_0), x_0)$ が成立する。この式で $n = 0$ とすると、 $d(x_0, x^*) \leq \frac{1}{1 - \alpha} d(g(x_0), x_0)$ が成立する。

Picard-Lindelöf の定理 (1)

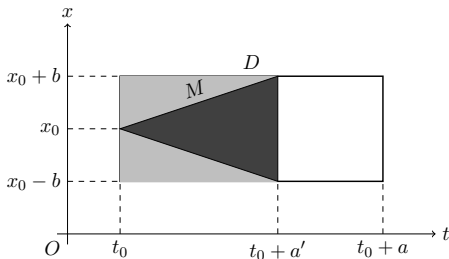
Picard-Lindelöf の定理

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^l, t \in \mathbb{R} \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}$$

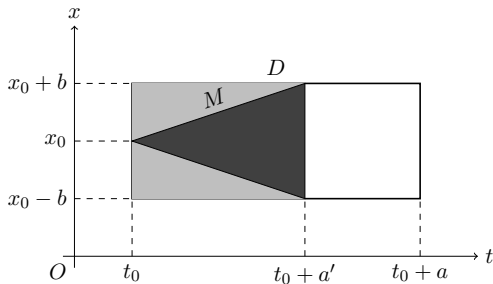
について、 f がある領域 $D = \{ (x, t) \mid t_0 \leq t \leq t_0 + a, \|x - x_0\| \leq b \}$ で Lipschitz 条件

$$\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

を満たすとする。このとき、 $M = \sup_{(x, t) \in D} \|f(x, t)\|$ 、 $a' = \min(a, \frac{b}{M})$ とすると、 $[t_0, t_0 + a']$ でただ一つの解を持つ。



Picard-Lindelöf の定理 (2)



Picard-Lindelöf の定理の証明の概略

$$P : x(t) \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(x(t), t) dt$$

とし、 $D' = \{ (x, t) \mid t_0 \leq t \leq t_0 + a', \|x - x_0\| \leq b \}$ とすると、

- P は D' 内の全ての連続関数を D' 内に移す。
- P は重み付き最大値ノルム $\|x(t)\| = \sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + a'} e^{-2L(t-t_0)} \|x(t)\|$ を入れると縮小写像となる。
- よって、 P の不動点は D' に唯一存在する。