平成 12 年度

卒業論文

Affine Arithmetic における除算の改良について

On the Improvement of the Division of the Affine Arithmetic

平成 13 年 2 月 5 日

指導教授： 柏木 雅英 助教授

早稲田大学理工学部情報学科

G97P091-5 宮島 信也

目 次

1 序論 **5**
- 1.1 背景 . . . 6
- 1.2 本論文の目的 . . . 7
- 1.3 本論文の構成 . . . 7

2 区間演算 **8**
- 2.1 はじめに . . . 9
- 2.2 区間 . . . 9
- 2.3 区間演算 . . . 9
- 2.4 むすび . . . 10

3 Affine Arithmetic **11**
- 3.1 はじめに . . . 12
- 3.2 Affine 形式 . . . 12
- 3.3 初期化 . . . 12
- 3.4 Affine 演算 . . . 13
- 3.5 線形演算の取り扱い . . . 14
- 3.6 非線形演算の取り扱い . . . 14
- 3.7 単項演算の定義 . . . 15
- 3.8 非線形二項演算 . . . 17
- 3.9 むすび . . . 18

4 Affine Arithmetic における乗算 **19**
- 4.1 はじめに . . . 20
- 4.2 Stolfi の乗法 . . . 20
- 4.3 宮田-柏木の乗法 (改良乗算) . . . 21
- 4.4 改良乗算の優位性について . . . 21
- 4.5 むすび . . . 22

5 Affine Arithmetic における除算 **23**
5.1 はじめに 24
5.2 従来の方法 24
5.3 柏木の方法 24
5.4 白井の方法 25
5.5 今回の方法 26
5.6 むすび 27

6 3 つの手法の比較 **28**
6.1 はじめに 29
6.2 数値実験 29
6.3 考察 32

7 まとめ **33**

8 謝辞 **35**

参考文献 **37**

図 目 次

3.1 x と y に相関がない場合 13
3.2 x と y に相関がある場合 13
3.3 非線形関数の線形近似 16
3.4 $\frac{1}{x}$ の最適な線形近似 (x が正の区間のとき) 17

表 目 次

2.1 区間 $[x], [y]$ の乗算 10
2.2 区間 $[x], [y]$ の除算 10

6.1 入力区間に対する z_{n+1} の値 31

第 1 章

序論

1.1 背景

非線形現象を伴う回路や各種システムに対する解析は, 数値計算によって行うのが一般的である。ところが, 数値計算で得られた結果には様々な誤差が混入している。例えば, 数値計算を行うということは, 連続数学の問題を離散化して解くことであるが, この過程で離散化誤差が生じる。また数値計算はほとんどの場合, 計算機を利用して解くが, そうすると丸め誤差が生じる。

近年, 計算機のハードウェアの性能が飛躍的に向上したことでより大規模な問題を高速に解くことができるようになったが, それだけでは数値計算の方法を質的に変革するものではなかった。これに対し, 数値計算を行うと同時にその解の誤差評価まで行う, いわゆる「精度保証付き数値計算法」が近年長足の進歩を遂げ, その有用性によって注目されている。

一般に, 計算機利用の数値計算で, 連続数学の問題を計算する場合, 計算機の浮動小数点数は有限個であるため, 実数を正確に表わすことができない。そのため, 2 つの浮動小数点数を両端とする区間の中に実数を包み込み, その区間同士の加減乗除等の演算を演算結果として有り得る集合を包含するように定義する, 区間演算と言う方法が考えられた。これは幅の充分狭い区間に, 求める解が含まれることが分かれば実用上充分だからである。

区間演算の大きな欠点として, 計算された区間は真の解を確かに含むものの, 区間幅が極端に大きくなることが挙げられる。例として $f(x) = x^2 - 2x$ を考える。通常の区間演算の手法で区間 $[0.9, 1.1]$ の演算を行なうと $[-1.39, -0.59]$ という結果になってしまう。真の値は $[-1.0, -0.99]$ であるのでこれでは実に 80 倍の区間の開きになってしまう。この区間の増大の原因は二つの関数 x^2 と $2x$ が $[0.9, 1.1]$ の区間では同じ x の関数で互いに相関があり, しかも区間内で傾きが非常に近い値をとりそれの減算をするためであり, 区間演算ではこの相関性を無視して独立な値として計算しているため上の例のように区間が爆発的に増大してしまうのである。

区間演算で起こる区間の増爆発的な増大を解決するために Mean Value Form 等の様々な手法が提案されているが, 本論文では, その方法の一つである Affine Arithmetic に注目する。この手法は Stolfi ら [1] によって提案された, 区間演算の拡張である。区間演算では, ある区間が他の区間に全く影響しないのに対し, Affine Arithmetic では変数間の相関を考慮することで, 通常の区間演算より過大評価の少ない結果を与えることができるうえ, 計算を進めていくうちに打ち消しが起きて区間幅が縮まる場合があるという特長をもつ。この特長により, Affine Arithmetic は計算式が膨大な場合や, 計算式が多くの変数を含んでいるような場合等に特にその効果を発揮する。上の例を Affine Arithmetic で計算すると $[-1.0, -0.99]$ となる。

Affine Arithmetic における非線形演算は真の像そのものではなく, その包含を演算結果としているのだが, そこで追加される誤差項の係数は一般にはその後の演算で打ち消しが起きず区間評価の性能を落とす元凶となる。Affine Arithmetic では主な非線形単項演算 ($\sin(x)$, $1/x$ など) は既にその最良の計算方法が発見されているが, [1] で定義された Affine 形式同士の乗算は, 簡便ではあるけれど包含のしかたが甘く, これが区間評価の性能をかなり落としていた。また, Affine 形式同士の除算については [1] では定義されておらず, $x/y = x \times (1/y)$ のように, 逆数をとる単項演算と乗算の合成として計算していた。しかしこのように非線形演算

を分解すると、一回の演算で誤差項が 2 つ増加してしまい, 区間評価の性能を落としてしまう。そこで柏木 [2] は除算を直接計算する (分解しない) 方法を発表した。この方法は計算時間を優先して, 複雑な場合分けが必要な部分を近似することにより, 計算を一部簡略化している。それを緻密に計算した白井 [3] の方法は x と y の間に相関がなければ最適な結果を与える。[3] を上回る方法は理論上はあると考えられるが, 現状では知られていない。一方 [1] の乗算の方法は, 宮田-柏木 [4] によって改良されている。この方法は変数間の相関が強い場合に,[1] よりはるかに過大評価の少ない (tight な) 区間評価を与える。

1.2 本論文の目的

本論文では $x/y = x \times (1/y)$ と分解する除法において用いる乗算に,[4] で定義された改良乗算を用いる。この方法で得られる結果は, 従来の方法 ($x/y = x \times (1/y)$ として, その乗算を [1] の方法で計算する方法) が与える結果と比べて, 常に同等以上の (過大評価が多くなく, かつほとんどの場合に優る) 結果である。そのことは第 4.4 節で証明する。のみならず, 本論文の手法は, 乗算の性能が強化された分, 除算を分解したことによるロスを補って, 現状で最適な結果を与える [3] の方法よりよい結果を与えることが期待できる。そこで, 本論文の手法を分解しない [2] や [3] の除法と比較する。

1.3 本論文の構成

本論文は次のような構成をとる。

第 2 章では精度保証付き数値計算の基本的な手法である, 区間演算についての解説とその問題点を取り上げる。

第 3 章では Stolfi らによる Affine Arithmetic の定義とその有効性, また, 現状の解説をする。

第 4 章では Stolfi らによる従来の Affine Arithmetic の乗算の手法と宮田, 柏木により改良された Affine Arithmetic の乗算の手法を紹介する。

第 5 章では柏木による Affine Arithmetic の除算の手法とこれを改良した白井による Affine Arithmetic の除算の手法を紹介し, 今回提案する Affine Arithmetic の除算の手法について説明する。

第 6 章では実際にプログラムをくみ, いくつかの数値例により 3 つの方法の精度の比較を行う。

第 2 章

区間演算

2.1 はじめに

Affine Arithmeticの解説の前に、本章ではまず区間演算の説明をする.

2.2 区間

区間演算は数値計算において最も一般的な手法であり,Affine Arithmeticの特徴は区間演算との比較で明確になる. 区間は実数値を [下限, 上限] という 2 つの浮動小数点数で挟まれた区間で表現し

$$[\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\}$$

とあらわす. ただし,$\underline{x}, \overline{x}$ はそれぞれ区間の下端, 上端を表わし , $\underline{x}, \overline{x} \in \boldsymbol{R}$ かつ $\underline{x} \leq \overline{x}$ とする.

2.3 区間演算

区間演算は区間同士の加減乗除等の計算を「 演算結果として有り得る集合を包含するように 」定義することにより行なわれる.

2 つの区間 $[x], [y]$ が与えられたときその区間の四則演算を次のように定義する.

$$[x] \circ [y] = \{x \circ y \mid x \in [x], y \in [y]\}$$

ただし $\circ \in \{+, -, \times, /\}$ とする. この定義では次が成立する.

$$\begin{aligned}
[x] + [y] &= [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}] \\
[x] - [y] &= [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}] \\
[x] \times [y] &= [\min\{\underline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}\}, \max\{\underline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}\}] \\
[x]/[y] &= [x] \times [1/\underline{y}, 1/\overline{y}], (0 \notin [y])
\end{aligned}$$

さらに乗算と除算については, 場合分けにより, より少ない手間で計算することができる (表 2.1, 表 2.2)

区間演算について, 包含関係における単調性,

$$[x] \subseteq [x'], [y] \subseteq [y'] \longrightarrow [x] \circ [y] \subseteq [x'] \circ [y'], \circ \in \{+, -, \times, /\}$$

が成立する. また加法と乗法に関し交換則が成立する.

$$[x] \circ [y] = [y] \circ [x], \circ \in \{+, \times\}$$

しかし, 減法と除法の逆元は存在しない. すなわち,$-[x] = [-\overline{x}, -\underline{x}]$ であるが

$$0 = [0] \subseteq [x] - [x] = [\underline{x} - \overline{x}, \overline{x} - \underline{x}]$$

	$y \geq 0$	$y \ni 0$	$y \leq 0$
$x \geq 0$	$[\underline{xy}, \overline{xy}]$	$[\overline{xy}, \overline{xy}]$	$[\overline{xy}, \underline{xy}]$
$x \ni 0$	$[\underline{xy}, \overline{xy}]$	$[\min\{\underline{xy}, \overline{xy}\}, \max\{\underline{xy}, \overline{xy}\}]$	$[\overline{xy}, \underline{xy}]$
$x \leq 0$	$[\underline{xy}, \overline{xy}]$	$[\underline{xy}, \underline{xy}]$	$[\overline{xy}, \underline{xy}]$

表 2.1: 区間 $[x], [y]$ の乗算

	$y \geq 0$	$y \leq 0$
$x \geq 0$	$[\underline{x}/\overline{y}, \overline{x}/\underline{y}]$	$[\overline{x}/\overline{y}, \underline{x}/\underline{y}]$
$x \ni 0$	$[\underline{x}/\underline{y}, \overline{x}/\underline{y}]$	$[\overline{x}/\overline{y}, \underline{x}/\overline{y}]$
$x \leq 0$	$[\underline{x}/\underline{y}, \overline{x}/\overline{y}]$	$[\overline{x}/\underline{y}, \underline{x}/\overline{y}]$

表 2.2: 区間 $[x], [y]$ の除算

$$1 = [1] \subseteq [x]/[x]$$

となる. 上式で等号は $[x]$ が点区間のときのみ成立する.

また, 分配則も区間演算に対しては成立しない. その代わり次の劣分配則が成立する.

$$[x] \times ([y] + [z]) \subseteq [x] \times [y] + [x] \times [z]$$

上式で等号は区間 $[y]$ と $[z]$ が同じ符号を持つときに成立する.

2.4 むすび

本章では区間演算の概説を行った. 区間演算はその考え方が単純でわかりやすいが, 単純に区間演算を行っていくと, 区間の幅が増大し, その結果の値の使うのには非常に扱いにくくなる. それは区間が単純に演算可能になっているというだけで, それぞれの変量の相関性などの内容についてはまったく考慮されないためである.Affine Arithmetic ではこの区間演算よりも絞った区間で演算を行うことが可能である. 次章ではその仕組みを紹介する.

第 3 章

Affine Arithmetic

3.1 はじめに

本章では Affine Arithmetic の概念と定義の説明を行っていく.

3.2 Affine 形式

Affine Arithmetic は, 変数間の相関性を考慮することにより, 区間演算で区間が爆発的に増大する問題を解決する方法の一つである.

Affine Arithmetic では, 変量 x は affine 多項式

$$x = x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n \tag{3.1}$$

で表される. ここで,x_i は実数であり,ε_i はそれが区間 $[-1, 1]$ に含まれることだけが分かっているような dummy 変数であり,x の変量の部分のそれぞれ独立した構成要素である.

x_0 をこの Affine form の central value, 係数 x_i を部分偏差 (partial deviations),ε_i を noise symbols という.noise symbol である,ε_i はそれぞれ独立した値をとって変量 x を構成し, 係数 x_i がそのふれ幅を決定する.

たとえば,Affine 形式 x, y があり, それが

$$x = 1 + 0.5\varepsilon_1 \tag{3.2}$$

$$y = 1 + 0.5\varepsilon_2 \tag{3.3}$$

とする. これは x と y に相関性がない状態で, このとき (x, y) がとり得る領域は図 3.1 のようになる.

これに対し,

$$x = 1 + 0.5\varepsilon_1 \tag{3.4}$$

$$y = 1 + 0.4\varepsilon_1 + 0.1\varepsilon_2 \tag{3.5}$$

では, それぞれがとり得る範囲は $[0.5, 1.5]$ で変わらないが ε_1 の係数を見ると分かるように両者には強い相関があり (x, y) のとり得る範囲は図 3.2 のようになる.

3.3 初期化

n 変数の関数 $f(p_1, \cdots, p_n)$ の評価を行なう場合, 最初に与えられる n 個の変数 $p_1, \cdots, p_n$ は以下のような affine 多項式で初期化する.

$$\begin{array}{c} p_1 = \frac{\overline{p_1}+\underline{p_1}}{2} + \frac{\overline{p_1}-\underline{p_1}}{2}\varepsilon_1 \\ p_2 = \frac{\overline{p_2}+\underline{p_2}}{2} + \frac{\overline{p_2}-\underline{p_2}}{2}\varepsilon_2 \\ \vdots \\ p_n = \frac{\overline{p_n}+\underline{p_n}}{2} + \frac{\overline{p_n}-\underline{p_n}}{2}\varepsilon_n \end{array} \tag{3.6}$$

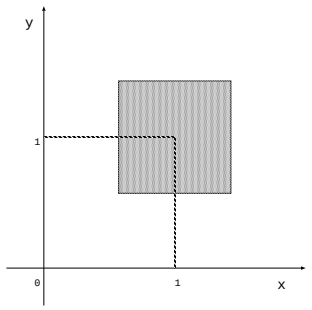

図 3.1: x と y に相関がない場合

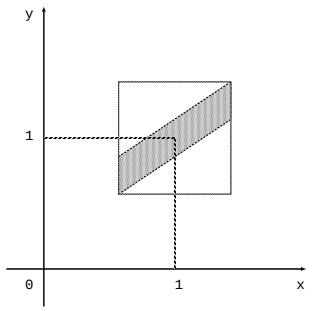

図 3.2: x と y に相関がある場合

但し, 入力変数 p_k の変域を $[\underline{p_k}, \overline{p_k}]$ とする.
Affine 多項式は, 次のようにして通常の区間に変換できる.

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta], \delta = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{3.7}$$

3.4 Affine 演算

2 つの Affine 多項式 $x, y,$

$$x = x_0 + x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n \tag{3.8}$$
$$y = y_0 + y_1\varepsilon_1 + \cdots + y_n\varepsilon_n \tag{3.9}$$

に対して, 以下に各種演算の定義を行う. すなわち,

$$\begin{aligned} z &= f(x) \\ &= f(x_0 + x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n) \end{aligned} \tag{3.10}$$

という $f(x)$ や

$$\begin{aligned} z &= f(x,y) \\ &= f(x_0 + x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n, y_0 + y_1\varepsilon_1 + \cdots + y_n\varepsilon_n) \end{aligned} \tag{3.11}$$

という $f(x,y)$ を,

$$z = z_0 + z_1\varepsilon_1 + \cdots + z_n\varepsilon_n \tag{3.12}$$

のような,Affine 多項式で表す.

Affine 演算の定義を, 線形なものと, 非線形なものに分けて行う.

3.5 線形演算の取り扱い

演算 f が線形な場合の演算は, 以下のように定義できる.

$$x \pm y = (x_0 \pm y_0) + (x_1 \pm y_1)\varepsilon_1 + \cdots + (x_n \pm y_n)\varepsilon_n \tag{3.13}$$

$$x \pm \alpha = (x_0 \pm \alpha) + x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n \tag{3.14}$$

(複号同順)
定数倍は次のように定義できる.

$$\alpha x = (\alpha x_0) + (\alpha x_1)\varepsilon_1 + \cdots + (\alpha x_n)\varepsilon_n$$

3.6 非線形演算の取り扱い

演算 f が非線形な場合, 真の像は Affine 形式で表わせないので,(線形近似)+(誤差項) の形で包含をとって結果とする. すなわち,

$$\begin{aligned} z &= f(x_0 + x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n, y_0 + y_1\varepsilon_1 + \cdots + y_n\varepsilon_n) \\ &= f^*(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \\ &= z_0^* + z_1^*\varepsilon_1 + \cdots + z_n^*\varepsilon_n \end{aligned} \tag{3.15}$$

としても, 一般的に z を正しく表すような $z_0^*, \cdots, z_n^*$ を決定することはできないので, 次のような線形近似 f^a を与える。

$$f^a(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = z_0 + z_1\varepsilon_1 + \cdots + z_n\varepsilon_n \tag{3.16}$$

f^* と f^a の間には, 最大で,

$$\max_{-1 \le \varepsilon_i \le 1} |f^*(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) - f^a(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)| \tag{3.17}$$

の誤差が生じるので, 誤差項を $z_{n+1}\varepsilon_{n+1}$ として,z を次のように表す。

$$\begin{aligned} z &= f^a(\varepsilon_1+,\cdots,\varepsilon_n)+z_{n+1}\varepsilon_{n+1} \\ &= (z_0+z_1\varepsilon_1+\cdots+z_n\varepsilon_n)+z_{n+1}\varepsilon_{n+1} \end{aligned} \tag{3.18}$$

ただし,

$$z_{n+1}=\max_{-1\le\varepsilon_i\le1}|f^*(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)-f^a(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)| \tag{3.19}$$

である。上式の右辺が厳密に計算できない場合は, その上界をとる。

次に, 係数 $z_0,\cdots,z_{n+1}$ の決め方に関する説明を, 単項演算の場合と二項演算の場合に分けて行う。

3.7 単項演算の定義

$f(x)=\sin(x)$ や $f(x)=e^x$ などの単項演算については, 次のように計算できる.

$$f(x)=(z_0+z_1\varepsilon_1+\cdots+z_n\varepsilon_n)+\delta\varepsilon_{n+1} \tag{3.20}$$

上式の δ は誤差項の係数であり, 式 (3.16) と式 (3.17) から $\delta=\max_{-1\le\varepsilon_i\le1}|f(x)-(z_0+z_1\varepsilon_1+\cdots+z_n\varepsilon_n)|$ により定義される. ただし単項演算の場合は, 関数 $f(x)$ と直線 $ax+b$ の区間 $[\underline{x},\overline{x}]$ における最大誤差 δ' を,

$$\delta'=\max_{x\in[\underline{x},\overline{x}]}|f(x)-(ax+b)| \tag{3.21}$$

として,

$$f(x)=(ax+b)+\delta'\varepsilon_{n+1} \tag{3.22}$$

のように包含をとったとしても, 両者は同一の結果を与える.
ゆえに, 式 (3.18) の z を決定する $(z_0,\cdots,z_{n+1}$ の値を決定する$)$ ことは, 式 (3.22) の a,b,δ' の値を決定することに帰着する。その決め方は非線形単項演算 $f(x)$ と x の変域 $[\underline{x},\overline{x}]$ に依存する (個別に定義しなければならない)。

例えば, 変域が $[\underline{x},\overline{x}]$ で,$0\notin x$ である区間 x(Affine 多項式 $x=x_0+x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$ で表わされ,$\underline{x}=x_0-\sum_{i=1}^n|x_i|,\overline{x}=x_0+\sum_{i=1}^n|x_i|$ である$)$ において,$\frac{1}{x}$ の最適な線形近似を, 実数 x_0 ~ x_n を用いて求める問題を考える.

まず,2 点 $(\underline{x},\frac{1}{\underline{x}}),(\overline{x},\frac{1}{\overline{x}})$ を通る直線 $f_1(x)$ は,

$$f_1(x)=-\frac{1}{\underline{x}\overline{x}}x+\frac{\underline{x}+\overline{x}}{\underline{x}\overline{x}} \tag{3.23}$$

であり、またこの直線と傾きが等しく, 曲線 $g(x)=\frac{1}{x}$ に接する直線 $f_2(x)$ は,

$$f_2(x)=-\frac{1}{\underline{x}\overline{x}}x\pm\frac{2\sqrt{\underline{x}\overline{x}}}{\underline{x}\overline{x}} \tag{3.24}$$

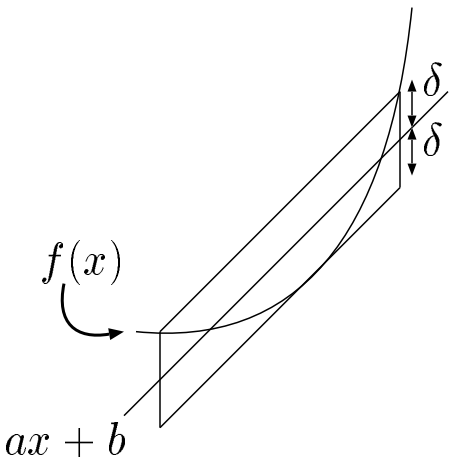

図 3.3: 非線形関数の線形近似

である. 上式の $\pm$ は,x が正の区間のとき $+$ となり, 負の区間のとき $-$ となる. 以上より dummy 変数 ε_{n+1} の係数である x_{n+1} を最小にするような直線 $h(x)$ は,

$$h(x) = -\frac{1}{\underline{x}\overline{x}}x + \frac{1}{2}(\frac{\underline{x}+\overline{x} \pm 2\sqrt{\underline{x}\overline{x}}}{\underline{x}\overline{x}}) \tag{3.25}$$

となる. 上式の $\pm$ は,$f_2(x)$ の場合と同様である. また,x_{n+1} は

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}|\frac{\underline{x}+\overline{x}-(\pm 2\sqrt{\underline{x}\overline{x}})}{\underline{x}\overline{x}}| \tag{3.26}$$

である. 以上より $\frac{1}{x}$ は,

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{\underline{x}\overline{x}}x + \frac{1}{2}(\frac{\underline{x}+\overline{x} \pm 2\sqrt{\underline{x}\overline{x}}}{\underline{x}\overline{x}}) + \frac{1}{2}|\frac{\underline{x}+\overline{x}-(\pm 2\sqrt{\underline{x}\overline{x}})}{\underline{x}\overline{x}}|\varepsilon_{n+1} \tag{3.27}$$

であり, これに, 式 (3.1) を代入すると,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= -\frac{1}{\underline{x}\overline{x}}x_0 + \frac{1}{2}(\frac{\underline{x}+\overline{x} \pm 2\sqrt{\underline{x}\overline{x}}}{\underline{x}\overline{x}}) + (-\frac{x_1}{\underline{x}\overline{x}})\varepsilon_1 + (-\frac{x_2}{\underline{x}\overline{x}})\varepsilon_2 + \cdots + (-\frac{x_n}{\underline{x}\overline{x}})\varepsilon_n \\ &+ \frac{1}{2}|\frac{\underline{x}+\overline{x}-(\pm 2\sqrt{\underline{x}\overline{x}})}{\underline{x}\overline{x}}|\varepsilon_{n+1}\end{aligned} \tag{3.28}$$

となる.

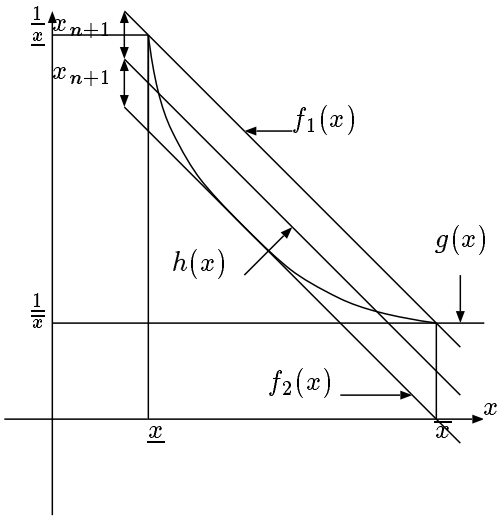

図 3.4: $\frac{1}{x}$ の最適な線形近似 (x が正の区間のとき)

3.8 非線形二項演算

Affine 多項式 x, y:

$$x = x_0 + x_1\varepsilon + \cdots + x_n\varepsilon_n \tag{3.29}$$

$$y = y_0 + y_1\varepsilon + \cdots + y_n\varepsilon_n \tag{3.30}$$

に対する非線形二項演算 $z = f(x, y)$ について考える. 二項演算の場合も, 式 (3.16), 式 (3.17) より

$$\delta = \max_{-1\leq\varepsilon_i\leq 1} |f(x, y) - (z_0 + z_1\varepsilon_1 + \cdots + z_n\varepsilon_n)| \tag{3.31}$$

の最小値と, そのときの $z_0, \cdots, z_n$ の値が求まれば最適であるが, これを直接解くことは極めて難しい.

単項演算の場合と同様に,x と y の変域 X, Y を求め,$(x, y) \in X \times Y$ において $f(x, y)$ を最良近似する一次式 $ax + by + c$ を求め,

$$ax + by + c + \delta'\varepsilon_{n+1}(\delta' = \max_{\substack{x\in X\\ y\in Y}} |f(x, y) - (ax + by + c)|) \tag{3.32}$$

を結果とする方法を使うことはできる。しかし, 単項演算の場合と違ってこの方法は必ずしも最良の近似を与えるとは限らない。これは,x と y に相関がある場合, 点 (x, y) は一般に $X \times Y$ で与えられる長方形領域内全ての点をとるとは限らないためである。

このように二項演算の場合最良近似問題は未解決である。しかし, 現状では $f(x, y)$ を領域 $X \times Y$ において $ax + by + c$ で近似する方法をとっている。つまり, 式 (3.18) の z を

決定する $(z_0, \cdots, z_{n+1}$ の値を決定する) かわりに,(それより性能の悪い評価であるが) 式 $ax + by + c + \delta' \varepsilon_{n+1}$ における a, b, c, δ' の値を決定する。
例えば [1] で定義された乗算 (Stolfi の乗法) の場合,

$$\begin{aligned} \delta' &= \max_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} |x \times y - (ax + by + c)| \\ &= \max_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} |(x - b)(y - a) + (-ab - c)| \end{aligned} \tag{3.33}$$

より,a, b, c が

$$a = y_0, b = x_0, c = -ab = -x_0 y_0 \tag{3.34}$$

のとき δ' の値が最小になり,

$$\delta' = \max_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} |(x - x_0)(y - y_0)| \tag{3.35}$$

となる。以上より乗算を計算するには,

$$x \times y = y_0 x + x_0 y - x_0 y_0 + \delta' \varepsilon_{n+1} \tag{3.36}$$

を行なえばよい.

この δ' の値は, 一般的には, 式 (3.31) で定義される δ より大きめになってしまい, 必ずしも常に最良の値をとるわけではないが, 必ず真の値を包含し, また計算しやすいので現時点では Affine 形式どうしの乗算の主流となっている.

3.9 むすび

本章では Stolfi によって提案された Affine Arithmetic の定義について説明した. 第 3.8 節で説明した Affine Arithmetic の乗算の方法は変数間に相関がある場合の区間評価が甘い. 次章では宮田, 柏木により改良された乗算のアルゴリズムを紹介する.

第 4 章

Affine Arithmeticにおける乗算

4.1 はじめに

本章ではStolfiによる従来のAffine Arithmeticの乗算の手法と宮田-柏木による新手法の乗算の解説を行う.

4.2 Stolfiの乗法

第3.8節でも述べたが,Affine演算の乗算については、従来は一貫して、Stolfiの乗法が用いられてきた。この方法では、x, yの変域をX, Yとして、$(x, y) \in X \times Y$において、$x \times y$を最もよく近似する一次式

$$y_0 x + x_0 y - x_0 y_0 \tag{4.1}$$

とそのときの真の像との最大誤差

$$\delta = \max_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} |(x - x_0)(y - y_0)| \tag{4.2}$$

を用いて,

$$x \times y = y_0 x + x_0 y - x_0 y_0 + \delta \varepsilon_{n+1} \tag{4.3}$$

を結果とする。

ところで,乗算に限っては次のような包含の求め方もある。$x = x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i, y = y_0 + \sum_{i=1}^{n} y_i \varepsilon_i$であるから,

$$\begin{aligned} x \times y &= (x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i)(y_0 + \sum_{i=1}^{n} y_i \varepsilon_i) \\ &= x_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} (x_0 y_i + y_0 x_i) \varepsilon_i + (\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i \varepsilon_i) \end{aligned} \tag{4.4}$$

となるが,最後の項はε同士の積の形が出てしまい,Affine形式にならない。そこでこの項の全体を新たに$\delta \varepsilon_{n+1}$として計算する。x, yの振れ幅の最大値が$\sum_{i=1}^{n} |x_i|, \sum_{i=1}^{n} |y_i|$であるから,$\delta$を

$$\delta = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|)(\sum_{i=1}^{n} |y_i|) \tag{4.5}$$

とし,

$$\begin{aligned} x \times y &= x_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} (y_0 x_i + x_0 y_i) \varepsilon_i + (\sum_{i=1}^{n} |x_i|)(\sum_{i=1}^{n} |y_i|) \varepsilon_{n+1} \\ &= y_0 x + x_0 y + [c - \delta, c + \delta] \end{aligned} \tag{4.6}$$

(ただし,$c = -x_0 y_0, \delta = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|)(\sum_{i=1}^{n} |y_i|)$)

を結果とする方法である。なお,両者は同一の結果を与える。これらの方法は変数間に相関がない場合に限れば最良の方法である。

4.3　宮田-柏木の乗法 (改良乗算)

この方法は Stolfi の乗法と比べて常に同等以上の結果を得る。
これは

$$\begin{aligned} x \times y &= y_0 x + x_0 y + (-x_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{2}) + \delta' \varepsilon_{n+1} \\ &= y_0 x + x_0 y + [c' - \delta', c' + \delta'] \end{aligned} \tag{4.7}$$

(だだし $c' = -x_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{2}, \delta' = \sum_{i=1}^{n} |\frac{x_i y_i}{2}| + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} |x_j y_k + x_k y_j|$)
を結果とする。

4.4　改良乗算の優位性について

定理 **4.1** $x = x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i, y = y_0 + \sum_{i=1}^{n} y_i \varepsilon_i$ の積の表し方について, 次の 2 通りの方法を比べる。
•Stolfi の乗法

$$\begin{aligned} x \times y &= x_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} (y_0 x_i + x_0 y_i) \varepsilon_i + (\sum_{i=1}^{n} |x_i|)(\sum_{i=1}^{n} |y_i|) \varepsilon_{n+1} \\ &= y_0 x + x_0 y + [c - \delta, c + \delta] \end{aligned} \tag{4.8}$$

(ただし,$c = -x_0 y_0, \delta = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|)(\sum_{i=1}^{n} |y_i|)$)
• 改良乗算

$$\begin{aligned} x \times y &= y_0 x + x_0 y + (-x_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{2}) + \delta' \varepsilon_{n+1} \\ &= y_0 x + x_0 y + [c' - \delta', c' + \delta'] \end{aligned} \tag{4.9}$$

(だだし $c' = -x_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{2}, \delta' = \sum_{i=1}^{n} |\frac{x_i y_i}{2}| + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} |x_j y_k + x_k y_j|$)
式 (4.8), 式 (4.9) の表す領域をそれぞれ D_1, D_2 とすると,x, y に依存せず, 常に $D_2 \subseteq D_1$ が成立する。また, 等号が成立するのは $x_i y_i = 0 (1 \leq i \leq n)$ の場合に限られる。

証明

$$\begin{aligned} (c - \delta) - (c' - \delta') &= [(-x_0 y_0) - \{(\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=j+1}^{n} (|x_i y_j| + |x_j y_i|)\}] \\ &\quad -\{(-x_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{2}) - (\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i y_i|}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=j+1}^{n} |x_i y_j + x_j y_i|)\} \\ &= -\sum_{i=1}^{n} (\frac{x_i y_i}{2} + \frac{|x_i y_i|}{2}) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=j+1}^{n} (|x_i y_j| + |x_j y_i| - |x_i y_j + x_j y_i|) \\ &\leq 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

(等号成立は $x_i y_i = 0 (1 \leq i \leq n)$ のとき)

$$
\begin{aligned}
(c+\delta)-(c'+\delta') &= [(-x_0 y_0)+\{(\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i|+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=j+1}^{n}(|x_i y_j|+|x_j y_i|)\}] \\
&\quad -\{(-x_0 y_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i y_i}{2})+(\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i y_i|}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=j+1}^{n}|x_i y_j+x_j y_i|)\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\frac{|x_i y_i|}{2}-\frac{x_i y_i}{2})+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=j+1}^{n}(|x_i y_j|+|x_j y_i|-|x_i y_j+x_j y_i|) \\
&\geq 0 \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

(等号成立は $x_i y_i = 0 (1 \leq i \leq n)$ のとき)
以上より $(c-\delta) \leq (c'-\delta')$ かつ $(c+\delta) \geq (c'+\delta')$。よって定理 4.1 は証明された。

定理 4.1 の系 式 (4.8) の δ と式 (4.9) の δ' について,x, y に依存せず常に $\delta' \leq \delta$ が成立する。また, 等号が成立するのは $x_i y_i = 0 (1 \leq i \leq n)$ の場合に限られる。

証明 略

4.5 むすび

本章では Stolfi による従来の Affine Arithmetic の乗算の手法と, 宮田-柏木による, それを改良した新手法の乗算のアルゴリズムの解説を行った. 次章では Affine Arithmetic の除算について, 従来の方法と柏木の方法と白井の方法を紹介する。

第 5 章

Affine Arithmeticにおける除算

5.1 はじめに

本章では従来の Affine Arithmetic の除算の方法と. 柏木の方法と白井の方法を紹介し, 今回用いる方法を解説する。

5.2 従来の方法

はじめに述べたように、従来の除算の方法は $x/y = x \times (1/y)$ であるから、逆関数と乗算の組み合わせにより、計算している. この方法では、2 つの非線形演算を経由するので、ε は一回の除算で 2 つ増加してしまう.

5.3 柏木の方法

柏木の提案した一回の非線形演算による除算の方法は、乗算と同様に x/y を $ax + by + c$ で近似する方法である. この方法では、

$$b = -\frac{x_0}{\underline{y}\overline{y}} \tag{5.1}$$

で近似し、その b に対して

$$p = \max_{\underline{y} \le y \le \overline{y}} (\frac{\underline{x}}{y} - by) \tag{5.2}$$

$$q = \min_{\underline{y} \le y \le \overline{y}} (\frac{\underline{x}}{y} - by) \tag{5.3}$$

$$r = \max_{\underline{y} \le y \le \overline{y}} (\frac{\overline{x}}{y} - by) \tag{5.4}$$

$$s = \min_{\underline{y} \le y \le \overline{y}} (\frac{\overline{x}}{y} - by) \tag{5.5}$$

とすると、

$$a\underline{x} + c = \frac{p+q}{2} \tag{5.6}$$

$$a\overline{x} + c = \frac{r+s}{2} \tag{5.7}$$

を満たすように a, c を決定する。このとき、

$$\delta = \max\left(\frac{p-q}{2}, \frac{r-s}{2}\right) \tag{5.8}$$

となる。

最良の b を求めることは可能であるが、複雑な場合分けが必要となり、計算時間も増加する。なお、この方法における b の取り方は常に最善というわけではないが、a と c の取り方はその b に対して常に最善である。

5.4　白井の方法

白井の方法は、柏木の方法に基づき、複雑な場合分けをした結果最良の b を求めたものである。

$$\underline{x} > 0 \quad \text{かつ} \quad -\frac{\overline{x}}{\overline{y}^2} \geq -\frac{\underline{x}}{\underline{y}^2} \tag{5.9}$$

のとき、

$$A = \frac{\overline{x}\underline{y} - \underline{x}\overline{y}}{\underline{y}\overline{y}} \tag{5.10}$$

$$B = A(\overline{y} - \underline{y}) + 2(-\underline{x} - \overline{x} + 2\sqrt{\underline{x}\overline{x}}) \tag{5.11}$$

$$A' = \frac{\underline{x}\underline{y} - \overline{x}\overline{y}}{\underline{y}\overline{y}} \tag{5.12}$$

$$B' = A'(\overline{y} - \underline{y}) + 2(-\underline{x} - \overline{x} + 2\sqrt{\underline{x}\overline{x}}) \tag{5.13}$$

として、b の値の候補には

$$b = -\frac{(\sqrt{\overline{x}} - \sqrt{\underline{x}})^2}{4\underline{y}^2} \tag{5.14}$$

$$b = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - (\overline{y} - \underline{y})^2 A^2}}{(\overline{y} - \underline{y})^2} \tag{5.15}$$

$$b = -\frac{(\sqrt{\overline{x}} - \sqrt{\underline{x}})^2}{4\overline{y}^2} \tag{5.16}$$

$$b = \frac{B' \pm \sqrt{B'^2 - (\overline{y} - \underline{y})^2 A'^2}}{(\overline{y} - \underline{y})^2} \tag{5.17}$$

の 6 つがあり、これらの中で条件

$$-\frac{\overline{x}}{\underline{y}\overline{y}} \leq b \leq -\frac{\underline{x}}{\underline{y}\overline{y}} \tag{5.18}$$

を満たすもののうち、最小の値をとるものを選べばよい。また、

$$\overline{x} < 0 \quad \text{かつ} \quad -\frac{\underline{x}}{\underline{y}^2} \geq -\frac{\overline{x}}{\overline{y}^2} \tag{5.19}$$

のとき、

$$A = \frac{\underline{x}\overline{y} - \overline{x}\underline{y}}{\underline{y}\overline{y}} \tag{5.20}$$

$$B = A(\overline{y} - \underline{y}) - 2(-\underline{x} - \overline{x} - 2\sqrt{\underline{x}\overline{x}}) \tag{5.21}$$

$$A' = \frac{\overline{x}\overline{y} - \underline{x}\underline{y}}{\underline{y}\overline{y}} \tag{5.22}$$

$$B' = A'(\overline{y} - \underline{y}) - 2(-\underline{x} - \overline{x} - 2\sqrt{\underline{x}\overline{x}}) \tag{5.23}$$

として、bの値の候補には

$$b = -\frac{(\sqrt{-\overline{x}} - \sqrt{-\underline{x}})^2}{4\underline{y}^2} \tag{5.24}$$

$$b = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - (\overline{y} - \underline{y})^2 A^2}}{(\overline{y} - \underline{y})^2} \tag{5.25}$$

$$b = -\frac{(\sqrt{-\overline{x}} - \sqrt{-\underline{x}})^2}{4\overline{y}^2} \tag{5.26}$$

$$b = \frac{-B' \pm \sqrt{B'^2 - (\overline{y} - \underline{y})^2 A'^2}}{(\overline{y} - \underline{y})^2} \tag{5.27}$$

の6つがあり、これらの中で条件

$$-\frac{\overline{x}}{\underline{y}\overline{y}} \leq b \leq -\frac{\underline{x}}{\underline{y}\overline{y}} \tag{5.28}$$

を満たすもののうち、最大の値をとるものを選べばよい。それ以外の場合には、

$$b = -\frac{x_0}{\underline{y}\overline{y}} \tag{5.29}$$

とする。aとcとδの選び方は柏木の方法とまったく同様である。

この方法は、変数間に相関がない場合の最良近似である。また、[3]の数値実験の結果により、柏木の方法は白井の方法とそれほど遜色のない値を得ることが示されている。

5.5 今回の方法

今回の方法は, 第3.7節で述べた逆数をとる単項演算と第4.3節で述べた改良乗算を用いて,$x \times (1/y)$を行う方法である。$x = x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i, y = y_0 + \sum_{i=1}^{n} y_i\varepsilon_i$として,

$$\frac{1}{y} = z_0 + \sum_{i=1}^{n} z_i\varepsilon_i + z_{n+1}\varepsilon_{n+1} \tag{5.30}$$

とおき, 改良乗算を用いると,$x \times (1/y)$は,

$$\begin{aligned} x \times \frac{1}{y} \quad = \quad & (x_0 z_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i z_i}{2}) + \sum_{i=1}^{n} (x_0 z_i + x_i z_0)\varepsilon_i \\ & + (\sum_{i=1}^{n} |\frac{x_i z_i}{2}| + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} |x_i z_j + x_j z_i| + \sum_{i=0}^{n} |x_i z_{n+1}|)\varepsilon_{n+1} \end{aligned} \tag{5.31}$$

で与えられる。

5.6　むすび

本章では Affine Arithmetic の除算の従来の手法と, 分解しない柏木の手法と, それを改良した白井の手法の紹介を行った. 次章で実際にプログラムで実行して, 柏木の手法と白井の手法と今回用いる手法の比較をする.

第 6 章

3つの手法の比較

6.1 はじめに

本章では第 5.3 節で述べた柏木の方法と, 第 5.4 節で述べた白井の方法と, 今第 5.5 節で述べた今回の方法の,3 つの方法を数値例により比較する。

6.2 数値実験

$p \in [0,2], q \in [1,3]$ において、

$$(p + 0.5q + 0.5)/(3p - q + 4) \tag{6.1}$$

の値を計算する。変量 p, q は $p = 1 + \varepsilon_1, q = 2 + \varepsilon_2$ のような Affine 形式で表すことができ、

$$\begin{cases} x = p + 0.5q + 0.5 \\ y = 3p - q + 4 \end{cases} \tag{6.2}$$

とおいたところに、p, q を代入することで、次の式を得る。

$$\begin{cases} x = 2.5 + \varepsilon_1 + 0.5\varepsilon_2 \\ y = 5 + 3\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{cases} \tag{6.3}$$

これに対し ,3 つの方法のプログラムを実行する。上式を, これらのプログラムでは

```
x0=2.5
x1=1.
x2=0.5
y0=5.
y1=3.
y2=-1.
```

と入力する。柏木の方法で除算を行うプログラムで得られる出力結果は,

```
xmin=1.000000
xmax=4.000000
ymin=1.000000
ymax=9.000000
b=-0.277778
z0=1.123903
z1=-0.379873
z2=0.504508
z3=1.084796
```

となる。これらの出力結果のうち z_0 ~ z_3 が x/y を

$$\frac{x}{y} = z_0 + z_1\varepsilon_1 + z_2\varepsilon_2 + z_3\varepsilon_3 \tag{6.4}$$

のように表わしている。
同様に, 白井の方法で除算を行うプログラムで得られる出力結果は,

```
xmin=1.000000
xmax=4.000000
ymin=1.000000
ymax=9.000000
b=-0.340278
z0=1.052083
z1=-0.631944
z2=0.534722
z3=1.003472
```

となり, 今回の方法で除算を行うプログラムで得られる出力結果は,

```
ymin=1.000000
ymax=9.000000
ny0=0.333333
ny1=-0.333333
ny2=0.111111
ny3=0.222222
z0=0.694444
z1=-0.500000
z2=0.444444
z3=1.138889
```

となる。追加される誤差項の係数 z_3 は一般には打ち消しが起きず, ここでの過大評価は区間評価の性能を落とす元凶となる。ゆえに $|z_3|$ が小さい除法ほど, 優れている除法である。よってこの場合においては今回の方法は一番劣っている。
　次にいろいろな数値で試した結果を掲載する.

入力区間の Affine 形式による表示			
入力区間	柏木の方法	白井の方法	今回の方法
$x = -5 + 3\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ $y = -1.5 - 0.3\varepsilon_1 - 0.2\varepsilon_2$			
[-9,-1]/[-2,-1]	1.168861	1.072330	**0.811039**
$x = 5 + 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ $y = 1.5 + 0.1\varepsilon_1 - 0.4\varepsilon_2$			
[1,9]/[1,2]	1.168861	1.168861	**1.111039**
$x = 28 - 10\varepsilon_1 + 12\varepsilon_2$ $y = 4.5 + 0.5\varepsilon_1 + \varepsilon_2$			
[6,50]/[3,6]	2.111616	2.111616	**1.409331**
$x = 5 + 2\varepsilon_1 - 0.6\varepsilon_2 + 0.4\varepsilon_3$ $y = 5 - 0.7\varepsilon_1 - 1.1\varepsilon_2 + 0.2\varepsilon_3$			
[2,8]/[3,7]	0.310345	0.300645	0.327114
$x = -3 + 1.7\varepsilon_1 + 0.1\varepsilon_2 - 0.2\varepsilon_3$ $y = -2.5 - 0.02\varepsilon_1 + 0.38\varepsilon_2 + 0.1\varepsilon_3$			
[-5,-1]/[-3,-2]	0.209560	0.186612	0.197092
$x = 58.5 - 4\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 + 6\varepsilon_3 - 12.5\varepsilon_4$ $y = 29 + 5\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 + 4\varepsilon_4$			
[31,86]/[13,45]	1.025117	0.955976	1.168269
$x = -28 + 10\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 - 4\varepsilon_3 + 5\varepsilon_4$ $y = -4.5 - \varepsilon_1 + 0.3\varepsilon_2 - 0.2\varepsilon_3$			
[-50,-6]/[-6,-3]	2.111616	1.954758	**1.934331**
$x = 8 - 0.6\varepsilon_1 + 0.2\varepsilon_2 - 0.8\varepsilon_3 - 0.5\varepsilon_4 + 0.9\varepsilon_5$ $y = 5.5 - 0.1\varepsilon_1 - 0.8\varepsilon_2 + 0.2\varepsilon_3 + 0.3\varepsilon_4 - 0.1\varepsilon_5$			
[5,11]/[4,7]	0.173618	0.168529	0.216553
$x = -19.5 - 4\varepsilon_1 + 0.5\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 + \varepsilon_4 + 3\varepsilon_5$ $y = -16 - 0.3\varepsilon_1 + 1.6\varepsilon_2 + 0.6\varepsilon_3 + 0.1\varepsilon_4 + 1.4\varepsilon_5$			
[-30,-9]/[-20,-12]	0.182368	0.178908	0.198717
$x = 64 + 7\varepsilon_1 + 8\varepsilon_2 - 15\varepsilon_3 + 13\varepsilon_4 + 2\varepsilon_5 + 12\varepsilon_6$ $y = 47.5 + 20\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 14\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4 + 6\varepsilon_5 + 1.5\varepsilon_6$			
[7,121]/[2,93]	24.141613	22.769912	34.824086

表 6.1: 入力区間に対する z_{n+1} の値

6.3 考察

追加される誤差項の係数 z_{n+1} は一般には打ち消しが起きず, ここでの過大評価は区間評価の性能を落とす元凶となる。ゆえに $|z_{n+1}|$ が小さい除法ほど, 優れている除法である。

3 つの方法を比較してみると, 今回の方法は z_{n+1} の値が 1 番大きいときもあれば 2 番目のときもあり, また 1 番小さいときもある。入力区間を見ると, 今回の方法は,x の区間幅に対して,y の区間幅が十分に狭いときほど優位性の順位が高くなる。その理由は, 逆数をとる単項演算で追加される誤差項の絶対値が,x, y の区間幅と比べて十分小さくなるためであると考えられる。以上より, 今回の方法が, 従来の各方法と比べてもそれなりに (場合によっては極めて) 有効であることが示された。

第 7 章

まとめ

本論文では第 2 章で精度保証付数値計算の基礎である区間演算の解説を行ない, 第 3 章から Affine Arithmetic の定義の解説を行なった.

そして第 4 章で Stolfi による従来の Affine Arithmetic における乗算の手法と, 宮田-柏木により改良された乗算の手法の紹介をした. 第 5 章では従来の Affine Arithmetic における除算の手法と柏木の手法と, 柏木の手法を改良した白井の手法の解説を行った. 第 6 章では本論文で提案した方法を用いれば, 特別な場合につき, 柏木, 白井の方法よりも優れていることを示した. 今後の課題は今回の方法が優れている場合が起こる理由を導き出すことである. これで Affine Arithmetic における除算の改良について, 新たな展望を示すことができた.

第 8 章

謝辞

本研究を進め、本論文を作成するに当たり、常に正しい道を示し、終始丁寧な御指導及び御激励を賜り、その他日常の多くの面でもいろいろと御面倒を見て下さり御助言を与えて下さいました柏木雅英助教授に深く感謝致します。

また、卒業論文中間報告の際に御指導、御鞭撻を賜り、本研究に方向性を与えて下さった大石進一教授に深く感謝致します。

柏木研において柏木研助手宮田孝富 氏には, 非線形の分野について熱心に御指導してくださり、日頃の柏木研究室内でのあらゆる面において御教示頂いたことに、心より感謝申し上げます。

柏木研究室修士課程 2 年の岩折朱希嗣氏と高崎大輔氏には数値計算が専門でないながらもコンピューターに対する有用なアイディアを頂き深く感謝いたします。

柏木研究室修士課程 1 年の河原淳氏、金谷卓充氏、白井健一氏、長友泰崇氏、波多野伸哉氏、深谷光統氏、吉田直史氏には中間発表の際に適切なアドバイスを頂き、また柏木研究室における普段の生活でもお世話になり、心より感謝申し上げます。

最後に, 意見の交換や協力などして下さいました柏木究室学部 4 年の皆様, 菊池智行氏、黒崎俊行氏、石田寛氏、塩田孝一氏、西中川英氏、古川周一氏、宝迫敦氏に深く感謝いたします。

参考文献

[1] Marcus Vinícius A.Andrade, João L. D. Comba and Jorge Stolfi: “Affine Arithmetic”, INTERVAL ’94, St. petersburg (Russia), March 5-10, 1994.

[2] 柏木 雅英 :“Affine Arithmetic における除算について”, 信学技報, NLP 98-114, pp.23-30 ,

[3] 白井健一:“Affine Arithmetic における除算について”,
平成 11 年度柏木研究室卒業論文

[4] 宮田孝富、柏木雅英:“アフィン演算の乗算について”, 第 10 回 FAN インテリジェント · システム · シンポジウム 講演論文集, 講演受付番号 55, pp.55-60, (2000-10).

[5] 大石進一:“数値計算”,(応用解析セミナー), 裳華房,1999