平成１１年度

卒業論文

Krawczykの方法における区間幅の最適性について

On The Optimality of the Interval Width

for the Krawczyk Method

平成１２年２月４日

指導教授：柏木 雅英 助教授

早稲田大学 理工学部 情報学科

g96p134-7 渡部　啓

目 次

1 序論 **4**

2 区間演算の導入 **7**

2.1 はじめに 8

2.2 区間の説明 8

2.3 区間演算 8

3 ニュートン法の導入 **11**

3.1 はじめに 12

3.2 ニュートン法 12

3.3 簡易ニュートン法 13

3.4 簡易ニュートン法の収束定理 13

4 クラフチック法の導入 **15**

4.1 はじめに 16

4.2 縮小写像原理 16

4.3 平均値定理とクラフチック法 17

4.4 クラフチックの区間写像による解の包み込み 17

5 クラフチック法についての考察 **19**

5.1 はじめに 20

5.2 式変形 20

5.3 考察 21

6 数値実験 **23**

6.1 プログラムについて 24

6.2 数値実験 27

6.3 考察 27

7 まとめ **29**

謝辞 **31**

参考文献 **32**

図 目 次

5.1 $k = \frac{\alpha-1}{\alpha^2}$ のグラフ 22

6.1 区間の取り方のイメージ 25

6.2 真解との距離別成功率のグラフ 28

第 1 章

序論

数値計算で用いられる数値は, いわゆる浮動小数点形式で表されていて, 連続数学の問題の記述は実数の体系の上で行われる. これを現代の計算機を用いて行う際, 実数は浮動小数点数で近似して計算される. ここで, 計算機で扱う浮動小数点数は有限個であるので, これだけでは連続数学の問題は扱えない. そこで, 浮動小数点数を両端とする区間の中に連続数学の問題の解を包み込もうというアイデアが生まれてきた.

数値計算において, 計算を行うと同時にその結果の誤差評価をも同時に計算するような方法を総称して精度保証付き数値計算と呼び, 近年急速な進歩を遂げている. 精度保証付き数値計算の実現において最も基本的かつ重要な技法に, 区間演算が挙げられる. 区間演算とは, 実数値を [下限, 上限] という 2 つの浮動小数点数で挟まれた区間で表現し, その区間同士の加減乗除等の演算を「 演算結果として有り得る集合を包含するように 」定義することにより行われるもので,「 区間を数の拡張と考える 」ということに基づいている. 幅の十分狭い区間に, 求めようとする実数が入ることが示されれば実用上十分だからである. 区間を数と考えるには, その四則演算が定義されなければならない.

しかし, 区間演算にも問題が存在し, その一つとして, 確かに計算された区間は真の値を含むものの, 区間幅が極端に広くなってしまうことが多い点が挙げられる. これは特に関数の値域を評価する場合など, 比較的幅の広い区間を扱った場合に顕在化する. 例として, 関数

$$f(x) = x^2 - 2x$$

の値域を, 区間 $[0.9,1.1]$ で評価する問題を考えよう. 区間演算の定義に従って計算すると, $[-1.39, -0.59]$ のようになるが, 真の像は,$[-1, -0.99]$ であり, 実に 8 0 倍もの区間幅の開きがあることが分かる. この現象は, 2 つの関数 x^2 と $2x$ が同じ x の関数で互いに相関があるにも関らず, 区間演算における減算ではそれを無視して独立な値として計算を行ってしまうことに原因がある. この問題に対処するため, 有限次元非線形方程式の解法で言えば, その結果はクラフチック法に結実している. クラフチック法とは, ある区間 T について, 区間行列 M と区間写像 K を定義し,

$$K(T) \subset T$$

$$\|M\|_u < 1$$

が成立するか否かにより, 真の解を含む区間を生成する方法である. ここで, ある区間 T とはどのように選べば良いか. 簡易ニュートン法の収束定理においては区間幅として $\delta(>0)$ を用いることによって区間を表しているが,δ は以下のように定義されている.

$f : R^n \to R^n$ を 1 回連続微分可能な関数とする．有限次元多変数の連立非線形方程式:

$$f(x) = 0 \ (x \in R^n) \tag{1.1}$$

において,(1.1) 式の近似解 c が与えられたとき,L^{-1} を $f'(c)^{-1}$ の近似行列とすると, 区間幅 δ は c が良い近似解であれば,

$$\delta = \rho \| L^{-1} f'(c) \| \ (\rho \text{ は } 1 \text{ より大きな定数}) \tag{1.2}$$

のようにとる. さらに経験的に $\rho = 2$ を選ぶと, 区間

$$T = c + \delta \begin{pmatrix} [-1,1] \\ \vdots \\ [-1,1] \end{pmatrix}$$

内に真の解が存在することが多いと言われている.

ニュートン法では，近似解を $x_0 \in R^n$ とすると,$x_1 = x_0 + h$ が (1.1) 式のより良い近似解となるように h を定めることを考えているので，後に述べるようにして h を求める過程より，区間幅として (簡易) ニュートン法の修正量の大きさ $(= \|L^{-1} f'(x_0)\|)$ を用いるのは当然のように思われるが,$\rho = 2$ という選択は果たして適当であるのかどうか.

本研究ではニュートン法の区間版であるクラフチック法の区間の取り方としてニュートン法の修正量の 2 倍の最適性について, 式を元にした論理的な面と, 実際に何倍に設定すればクラフチックの解の包み込みが成功しやすいのかという実験的側面からの両面から考察した. 最適な区間幅が定義できれば, 非線形方程式の全解探索におけるクラフチックの方法を用いた「解の存在を保証する」テスト等に, より良い結果を得られることが予想される.

第 2 章

区間演算の導入

2.1 はじめに

本研究では, 区間演算をもとに計算が進められる. 区間演算は, 浮動小数点演算における丸め誤差の把握を行うための基本的な手法である. 以下、ニュートン法、クラフチック法の準備として区間の説明から入る.

2.2 区間の説明

区間とは

$$[\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in R | \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$$

と表される閉区間であるとする. ただし,$\underline{x} \leq \bar{x} \in R$ で, それぞれの区間の下端, 上端と呼ぶことにする. 以下,

$$[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$$

で区間を表すものとする.

$\underline{x} = \bar{x}$ となる区間 $[x]$ は点区間という. 点区間は 1 つの実数であるので, 点区間 $[x]$ の表す実数を x と書くことにする.

区間 $[x]$ について以下の定義をする：

$$d([x]) = \bar{x} - \underline{x}$$

$$r([x]) = \frac{\bar{x} - \underline{x}}{2}$$

$$m([x]) = \frac{\bar{x} + \underline{x}}{2}$$

をそれぞれ区間 $[x]$ の直径, 半径, 中心という.

2.3 区間演算

2 つの区間 $[x], [y]$ が与えられたとき, その 2 つの区間の四則演算を次で定義する：

$$[x] \circ [y] = \{x \circ y \in R | x \in [x], y \in [y]\} \quad (\circ \in \{+, -, \times, /\})$$

これを区間演算という. この定義では区間演算は無限回の実数演算をしないと実行できないような印象を与えるが, 次が成立する：

$$\begin{cases} [x]+[y]=[\underline{x}+\underline{y},\bar{x}+\bar{y}] \\ [x]-[y]=[\underline{x}-\bar{y},\bar{x}-\underline{y}] \\ [x]\times[y]=[min\{\underline{x}\underline{y},\bar{x}\bar{y},\underline{x}\bar{y},\bar{x}\underline{y}\},max\{\underline{x}\underline{y},\bar{x}\bar{y},\underline{x}\bar{y},\bar{x}\underline{y}\}] \\ [x]/[y]=[x]\times[\frac{1}{\bar{y}},\frac{1}{\underline{y}}]\ \ (0\notin[y]) \end{cases}$$

これから区間演算が有限回の実数演算で実行できることがわかる. 乗算 (表 2.1) と除算 (表 2.2) については, 場合分けにより, 少ない手間で演算する規則も簡単に導ける.

表 2.1: 区間 $[x],[y]$ の乗算 $[x]\times[y]$

	$\underline{y}\geq 0$	$[y]\ni 0$	$\bar{y}\leq 0$
$\underline{x}\geq 0$	$[\underline{x}\underline{y},\bar{x}\bar{y}]$	$[\bar{x}\underline{y},\bar{x}\bar{y}]$	$[\bar{x}\underline{y},\underline{x}\bar{y}]$
$[x]\ni 0$	$[\underline{x}\bar{y},\bar{x}\bar{y}]$	$[min\{\underline{x}\bar{y},\bar{x}\underline{y}\},max\{\underline{x}\underline{y},\bar{x}\bar{y}\}]$	$[\bar{x}\underline{y},\underline{x}\underline{y}]$
$\bar{x}\leq 0$	$[\underline{x}\bar{y},\bar{x}\underline{y}]$	$[\underline{x}\bar{y},\underline{x}\underline{y}]$	$[\bar{x}\bar{y},\underline{x}\underline{y}]$

表 2.2: 区間 $[x],[y]$ の除算 $[x]/[y]$

	$\underline{y}\geq 0$	$\bar{y}\leq 0$
$\underline{x}\geq 0$	$[\underline{x}/\bar{y},\bar{x}/\underline{y}]$	$[\bar{x}/\bar{y},\underline{x}/\underline{y}]$
$[x]\ni 0$	$[\underline{x}/\underline{y},\bar{x}/\underline{y}]$	$[\bar{x}/\bar{y},\underline{x}/\bar{y}]$
$\bar{x}\leq 0$	$[\underline{x}/\underline{y},\bar{x}/\bar{y}]$	$[\bar{x}/\underline{y},\underline{x}/\bar{y}]$

区間演算については, 包含関係における単調性

$$[x]\subseteq[x'],[y]\subseteq[y']\Longrightarrow\ [x]\circ[y]\subseteq[x']\circ[y']\ (\circ\in\{+,-,\times,/\})$$

が成立する.

また, 加法と乗法に関し交換則と結合則が成立する：

$$[x] \circ [y] = [y] \circ [x] \ (\circ \in \{+, \times\})$$

$$[x] \circ ([y] \circ [z]) = ([x] \circ [y]) \circ [z] \ (\circ \in \{+, \times\})$$

しかし加法と乗法の逆元は存在しない. すなわち,$-[x] = [-\bar{x}, -\underline{x}]$ であるが,

$$0 = [0] \subseteq [x] - [x] = [\underline{x} - \bar{x}, \bar{x} - \underline{x}]$$

$$1 = [1] \subseteq [x]/[x]$$

となることがわかる.$\subseteq$ の等号は $[x]$ が点区間のときのみ成立する.

また, 分配則も区間演算に対しては成立しない. その代わり次の劣分配則が成立する:

$$[x] \times ([y] + [z]) \subseteq [x] \times [y] + [x] \times [z]$$

この式で等号は, 例えば区間 $[y]$ と $[z]$ が同じ符号をもつときに成立する.

第 3 章

ニュートン法の導入

3.1　はじめに

クラフチック法の説明に入る前に, 簡易ニュートン写像など後に必要になる項目のために, ニュートン法から説明に入る.

3.2　ニュートン法

$x_0 \in R^n$ を (1.1) 式の近似解とし, $f'(x_0) \neq 0$ とする. このとき $x_1 = x_0 + h$ が, $f(x) = 0$ のより良い近似解となるように h を定めることを考える. f が 1 回連続微分可能であることより

$$f(x_1) = f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(|h|)$$

であるから, $f(x_0 + h)$ を $f(x_0) + f'(x_0)h$ と近似し,

$$f(x_0) + f'(x_0)h = 0$$

によって h を定める. ただし $|h| \to 0$ のとき，$o(h)/h \to 0$ とする．$f'(x_0) \neq 0$ という仮定より，

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

となる. よって

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

となる．ここで多変数のニュートン法の場合 $\frac{1}{f'(x)}$ を $Df(x)$ の逆行列 $Df(x)^{-1}$ で置き換える. ただし, $Df(x)$ は f の点 x におけるヤコビ行列である. さらに

$$g(x) = x - Df(x)^{-1} f(x) \tag{3.1}$$

とおくと上式は

$$x_1 = g(x_0)$$

と書かれる. これを繰り返して,

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - Df(x_n)^{-1} f(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

が導かれ, この解をを逐次的に改良していく方法がニュートン法である.

3.3　簡易ニュートン法

ニュートン法の変形として次のような方法も考えられる. G を $n \times n$ 正則行列として簡易ニュートン写像を

$$g(x) = x - Gf(x) \tag{3.2}$$

とおく. 逐次近似解法として

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - Gf(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を用いる方法を簡易ニュートン法と言う.

$$G = Df(x_0)^{-1}$$

とする場合や,G を $Df(x_0)^{-1}$ のなんらかの近似とする場合が多い.

3.4　簡易ニュートン法の収束定理

簡単のためヤコビ行列 $Df(x)$ を $f'(x)$ と書くことにする. 連立非線形方程式に対する簡易ニュートン法が収束するための条件を考えるために, 縮小写像原理を用いる. 縮小写像原理を利用して簡易ニュートン法が収束するか否かを判断する収束定理として以下を示す.

条件は上記と同様であるとして, 近似解 x_0 に対し, ある $\delta > 0$ が存在して次の条件を満たすものとする：

x_0 の近傍を

$$B = B(x_0, \delta) = \{x \in R^n | \ \|x - x_0\| \leq \delta\} \tag{3.3}$$

とするとき,

$$B \subset I \tag{3.4}$$

$$\max_{x \in B} \|I - Gf'(x)\| = k < 1 \tag{3.5}$$

$$\|Gf(x_0)\| + k\delta \leq \delta \tag{3.6}$$

このとき,$f(x)=0$ の真の解 x^* は B 内にただ 1 つ存在し, 誤差評価

$$\|x_0 - x^*\| \leq \frac{\|Gf(x_0)\|}{1-k} \tag{3.7}$$

が成り立つ.

$\|Gf(x_0)\|$ は (簡易) ニュートン法の修正量の大きさで,x_0 がよい近似解であれば, この修正量が小さいものと考えられる.

この定理では近似解 x_0 の近傍 B 内に真の解が存在するか否かを判定している. しかし,δ のとり方は示されていない. 文献では論理的ではなく, 経験的に x_0 が良い近似解であれば,

$$\delta = 2\|Gf(x_0)\| \tag{3.8}$$

と選ぶと B 内に真の解が存在することが多いと言われている. つまりここでニュートン法の修正量の 2 倍が用いられているわけである. これは多変数の場合でも 1 変数の場合でも同様である. この選択では条件 (3.6) は $k \leq \frac{1}{2}$ となる.

第 4 章

クラフチック法の導入

4.1 はじめに

(簡易) ニュートン法の収束定理の条件を, より容易にかつ自然な形で評価する手法として, 本章ではクラフチック法について述べる. これは, ニュートン法の区間版であり, 縮小写像原理と一体化されて真の解を含む区間を生成する方法である.

4.2 縮小写像原理

ここではクラフチック法の前の準備のための説明をする.

写像 g に不動点が存在する事を保証する定理を不動点定理という. 以下で述べる縮小写像定理は不動点定理の中でも, 最も基本的かつ有用なものである.

X を $d(x,y)$ を距離とする完備距離空間とし,$g : X \to X$ を全ての $x, y \in X$ に対して

$$d(g(x), g(y)) \leq \alpha d(x,y)$$

を満たすような写像とする. ただし,$\alpha < 1$ とする. このような g を縮小写像といい, 実数 α を縮小定数という. この時, 以下が成立する:

1. $g(x) = x$ を満たす点 x^*(不動点という) が X に唯一存在する.

2. x_0 を X 内の任意の点とし, 点列 $\{x_k\}$ を

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

で定めると,x_k は x^* に収束し, その収束速度は

$$d(x_k, x^*) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$$

で表される.

3. X 内の任意の点 x_0 に対して,

$$d(x_0, x^*) \leq \frac{d(g(x_0), x_0)}{1-\alpha}$$

この定理において, 本論文では

X : R^n 内の閉集合

$d(x,y)$: $\|x-y\|$. ただし ノルムは $\|x\| = max|x_i|$(最大値 ノルム) で定める.

のように読み替える.

4.3 平均値定理とクラフチック法

まず, 区間演算における区間幅の増大を抑える基本的な技法として平均値定理について述べる. クラフチック法はニュートン法に平均値定理を適用することによって得られる.

$X = R^n, Y = R^m, D \subset X$ とする. 以下,$I(D)$ で D 内の有界な閉区間の集合を表すことにする.$I(D)$ から $I(Y)$ への写像を区間写像という. 区間写像 $F : I(D) \to I(Y)$ が $f : D \to Y$ の区間包囲であるとは, 全ての $I \in I(D)$ について $F(I) \supset f(I)$ が成立することをいう.

$m : I(D) \to Y$ を $m(I) \in I$ を満たす任意の関数とする.$f : D \to Y$ に対して,

$$F_c(I) = f(c) + F'(I)(I-c) \quad (c = m(I)) \tag{4.1}$$

で定義された区間写像 $F : I(D) \to I(Y)$ を f の中心形式という. 特に,$m(I) = Mid(I)$ である場合,$F_m(I)$ とかき, 平均値形式という. ただし,$Mid(I)$ は区間 I の中心で,F' は f' の区間包囲であるとする.

非線形方程式 $f(x) = 0$ の解法としてのクラフチックの区間写像を用いる方法は, 簡易ニュートン写像の平均値形式による区間包囲を利用する方法である. この区間包囲を利用すれば, 簡易ニュートン法の反復に対して縮小写像原理が成立するか否かを用意に確かめることができる.

4.4 クラフチックの区間写像による解の包み込み

クラフチックの区間写像を用いた解の包み込みのための定理は以下のようである.

$U \subset R^n, f : U \to R^n$ を C^1 級とする. ある区間 $T \in I(U)$ について, 区間行列 M を

$$M = E - L^{-1}F'(T) \tag{4.2}$$

区間写像 $K : I(T) \to I(R^n)$ を

$$K(I) = c - L^{-1}f(c) + M(I - c),\ c = Mid(I) \tag{4.3}$$

で定義する. ただし,E は単位行列,L は $(f'(c)$ の近似である$)$ 正則な点行列, 区間写像 F' を導関数 f' の区間包囲とする. ここで,

$$K(T) \subset T \tag{4.4}$$

$$\|M\|_u < 1 \tag{4.5}$$

が満たされるならば,T に方程式 $f(x) = 0$ の解 x^* が唯一存在する.

ただしこの定理において, 与えられたスケーリングベクトル $u =^t (u_1, \ldots, u_n) \in R^n (u_i > 0)$ に対して, 区間ベクトル $I \in I(R^n)$ のノルムを

$$\|I\|_u = \max_{1 \le i \le n} \frac{|I_i|}{u_i} \tag{4.6}$$

で, 区間行列 $A \in I(L(R^n; R^n))$ のノルムを

$$\|A\|_u = \max\{\|AI\|_u |\ \|I\|_u = 1\} = \|\ |A|u\|_u \tag{4.7}$$

で定める. ここでも T のとり方は経験的に

$$T = c + e \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ \vdots \\ [-1, 1] \end{pmatrix} \quad (e = 2\|L^{-1}f'(c)\|) \tag{4.8}$$

としている.

第 5 章

クラフチック法についての考察

5.1　はじめに

以上を踏まえてニュートン法の修正量の 2 倍について考察した. 式中に区間を用いているクラフチック法の $(4.2), (4.3), (4.4)$ 式に焦点を当てて,$\rho = 2$ の最適性について検証してみる.

5.2　式変形

まず,$(4.2), (4.3), (4.4)$ 式より,

$$K(T) = c - L^{-1}f(c) + (E - L^{-1}F'(T))(T - c) \subset T$$

$$\Leftrightarrow \ -L^{-1}f(c) + (E - L^{-1}F'(T))(T - c) \subset T - c \tag{5.1}$$

のように変形し,$T - c$ を T によって変動する関数とみなして

$$T - c = rad(T) \tag{5.2}$$

とおく. 同時に各項を絶対値で考えると下のようになる.

$$\Leftrightarrow \ |L^{-1}f(c)| + |E - L^{-1}F'(T)|rad(T) \leq rad(T) \tag{5.3}$$

さらに (4.8) 式を参考にし,α を T によって変動する変数とみなして,

$$rad(T) = \alpha|L^{-1}f(c)| \tag{5.4}$$

$$|L^{-1}f(c)| = |S| \tag{5.5}$$

とおく. ここで $|E - L^{-1}F'(T)|$ も T によって値が変わる変数と見なせるので,$k(> 0)$ を定数として,

$$|E - L^{-1}F'(T)| = \alpha k \tag{5.6}$$

とおけるとする. さらに式を簡単にすると以下のようになる.

$$\Leftrightarrow |S| + \alpha k \cdot \alpha|S| \leq \alpha|S| \tag{5.7}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \alpha^2 k \leq \alpha \tag{5.8}$$

$$\Leftrightarrow k \leq \frac{\alpha - 1}{\alpha^2} \tag{5.9}$$

(5.9) 式のグラフを考えると図 (5.1) に示すようになる.

5.3 考察

これより,$\alpha = 2$ のときに k は最大値 $\frac{1}{4}$ をとることがわかる. つまり,どんな値の $k(0 < k \leq \frac{1}{4}$ 内で$)$ に対しても,$\alpha = 2$ であればこの不等式は成り立つということである. さらにクラフチックの解の包み込み (4.4) 式が成り立ちやすいと言える. これにより, ニュートン法の修正量の 2 倍の最適性について理論上では示せた.

次章では, この考察をもとに α の最適な値について, 数値実験を通して示した. この章で述べた内容について, 次章で示す内容と同様の意味を表すものが得られれば, ニュートン法の修正量の 2 倍の最適性の証明ができたものと考えられる.

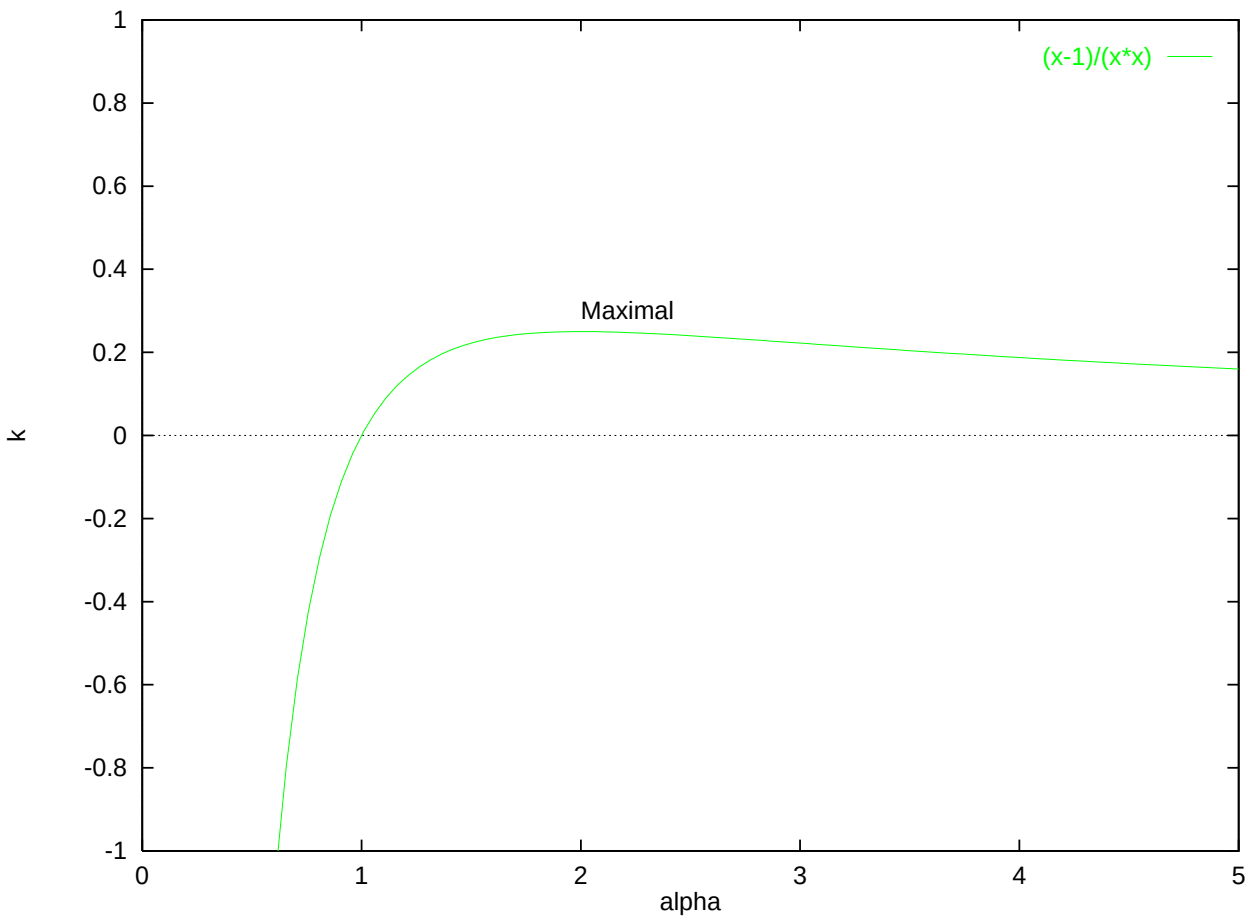

図 5.1: $k = \frac{\alpha-1}{\alpha^2}$ のグラフ

第 6 章

数値実験

6.1 プログラムについて

プログラムの目的は, 与えられた非線形方程式 $f(x) = 0$ の真の解 x^* と近似解 c の距離の大きさ d と,ρ の値の設定により, クラフチックの解の包み込みが成立するか否かを調べることである. この成功率の変化の様子の統計を取るさい, 方程式, 及びヤコビ行列はあらかじめ与えておいた. 特に, ここでは分かりやすくするため 2 変数の非線形方程式を用いた.

作成したプログラムでは大まかに以下のような手順を行った.

Step1 与えられた方程式よりニュートン法を十分繰り返し, 解を得る. 収束して来ると解が変わらなくなってくるので, この値を真の解とみなす.

Step2 1. で得た値に, 要素ごとにそれぞれ異なったランダム変数 $d(0 < d \leq 0.5)$ を加えて近似解を与える. ここでは d を減算したものは省かせた. 結局, 真解との距離を d の絶対値の大きいほうと定める際, 加減しても減算しても関係ないからである.

Step3 与えた近似解で $\|L^{-1}f'(c)\|$ を計算する.

Step4 ρ の値を設定して $(4.2), (4.3)$ 式を表示させる.

ここでは $0.1 < d \leq 0.2, 0.2 < d \leq 0.3, \ldots$ といった具合に d の範囲ごとに分けて統計を取った. 成功率の統計は一つの d の区間と ρ(ρ は 1 から 0.2 ごとに区切った) に対し 50 回の実行をした. また, ランダム変数を 0.5 以下としたのは, これ以上大きな値を与えても解の包み込みが成立することがなかったからである.

例として次式を用いて考えると, 解を含む区間とは図 (6.1) のようなイメージである.

$$f(x) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

図では C_1 の区間であるが, □ で囲ってある区間 (Interval T, 図では $\rho = 2$ と設定) 内に, 真解 x^* が含まれ,$(4.4), (4.5)$ 式が成り立っていれば解の包み込みが成功したことになる.

真の解は $[0.707106781186547, 0.707106781186547]$ を得る. 図では真の解を (x_1^*, x_2^*), ニュートン法の修正量を $|h|(= \|L^{-1}f'(c)\|)$, 近似解を $C_1, C_2, \ldots$ と表示している.

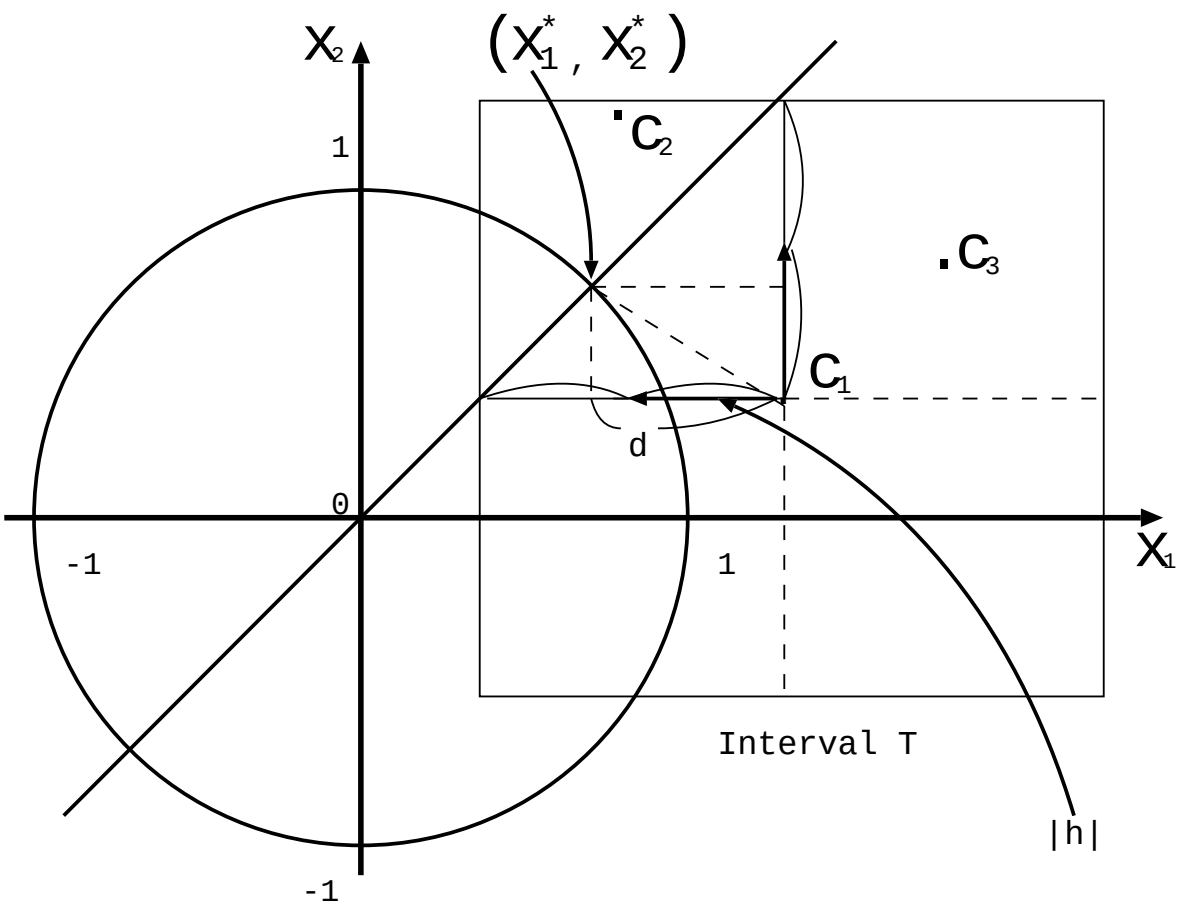

図 6.1: 区間の取り方のイメージ

次に実行例を表示する.

```
> x_*
0.707106781186547,0.707106781186547
```

このニュートン法で得られた解x_*を真解とし, 近似解cを下のようにランダム変数より決定する.

```
> c
0.759706781186547,0.848916781186547
```

これより, 真解との距離dは下のようになる.

```
> d
0.14181
```

ニュートン法の修正量は下のようになり, この何倍を区間幅にするか入力する.

```
> ||LI*f(c)||
0.134699313374768
>rho
2
```

ここでは2を代入すると, 区間幅はe, 区間はTとなる.

```
> e
0.269398626749535
> T
 [0.490308154437012,1.02910540793608]
,[0.579518154437012,1.11831540793608]
```

クラフチック法の結果, 以下のような結果が出力される.

```
krawczyk
>k[T]
 [0.623984274922986,0.804450660700574]
,[0.623984274922985,0.804450660700574]
```

```
>||M||
0.334943032106417
```

この場合,$(4.4), (4.5)$ 式が満たされているので, 解の包み込みは成功したことになる.

6.2 数値実験

上記のプログラムにより,(6.1) 式を用いて統計を行なった結果を図 (6.2) に示す. 縦軸を解の包み込みの成功率 $(\%)$, 横軸を ρ の値とし, 真解との距離 d ごとに示した.

$0 < d \leq 0.1$ のグラフは $\rho = 1.2$ 以降 100% の値を取り,$0.3 < d$ のグラフは常に 0% の値を取った.

6.3 考察

図から, 真の解と近似解の差が大きければ, クラフチック法において解の包み込みの成功率は下がると言える. しかし,$\rho = 2$ のときは明らかにある程度の真解との差であっても, 解の包み込みを行なえる. 以上から, 実際に数値実験の面からもニュートン法の修正量の 2 倍の最適性が認められたと言える.

図に関しては, 前章と同様の変化を示すものが得られた. つまり, 式変形を用いた考察が正しかったことが言える.

今回の結果は非常に良くできた結果である. ランダム変数の状態によっては,$\rho = 2$ 付近で成功率は高くなるものの,$\rho = 2$ で最も高い数値が出るとは限らない (例えば $0.2 < d \leq 0.3$ で統計する場合,0.2 付近のランダム変数が多ければ成功率が上がる). だが, 今回は予想通りニュートン法の修正量の 2 倍の適正さを示すことができた.

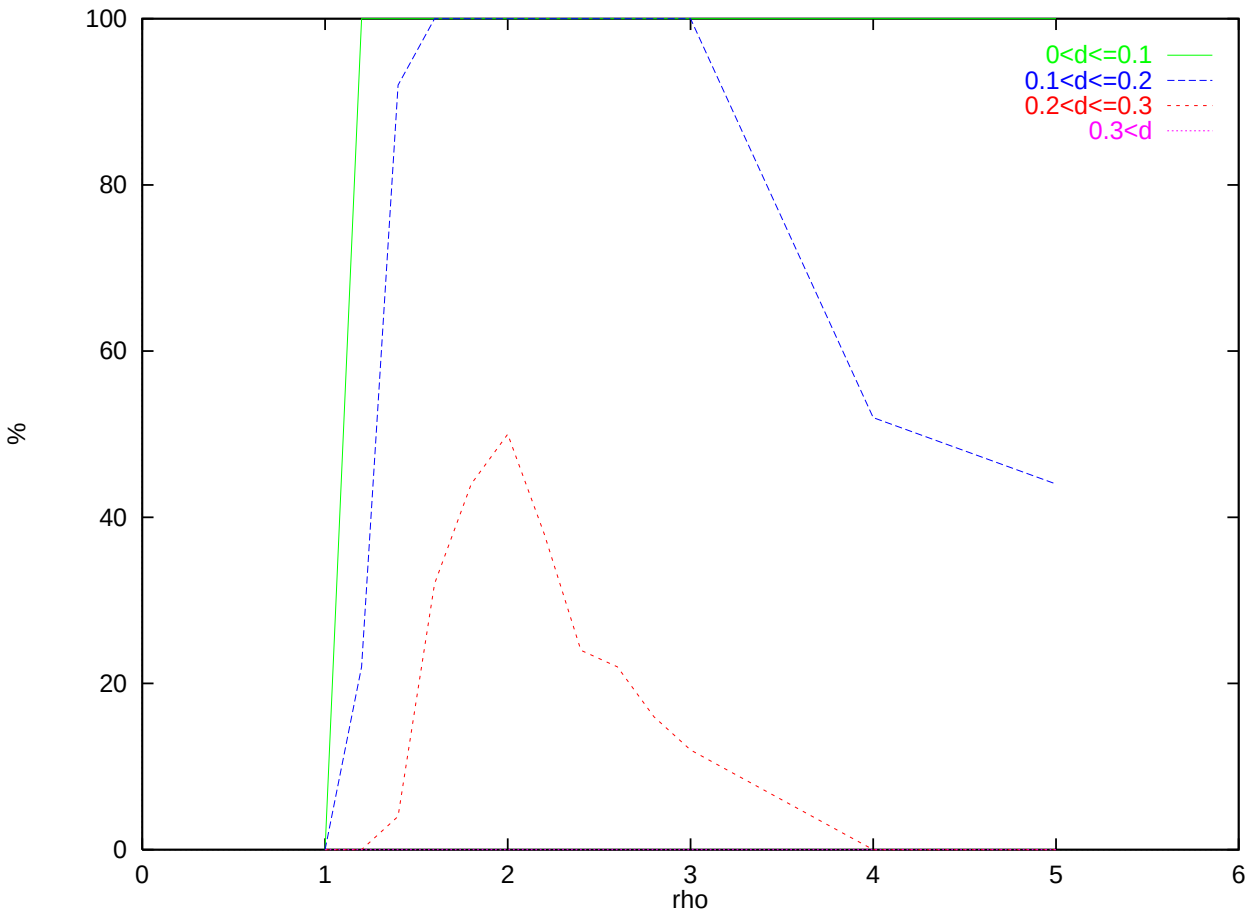

図 6.2: 真解との距離別成功率のグラフ

第 7 章

まとめ

本論文では第 2 章で数値計算の分野で最も一般的なものである区間演算の解説を行ない, 第 3 章でニュートン法, 第 4 章でクラフチック法を定義した. それらを通じて, ニュートン法の修正量の 2 倍の最適性を検証する.

第 5 章では, クラフチックの解の包み込みの定理より, 式を用いて推測を立て, それにより経験的ではない側面からニュートン法の修正量の 2 倍の最適性を示してきた. 式変形により導かれた式のグラフを表すことで、最終的に解の包み込みの成功率の統計を取る前に, 自分の推論に説得力を持たせることができた. 第 6 章では数値実験を通して, 実際に経験的な面からもニュートン法の修正量の 2 倍の最適性を示した. これらを通して, クラフチック法などにおいて区間を選択する際,$T = c + e \begin{pmatrix} [-1,1] \\ \vdots \\ [-1,1] \end{pmatrix}$ $(e = 2\|L^{-1}f'(c)\|)$ を用いればよいことの証明を行うことができた.

本研究は数値計算において, 新たな分野に対して行なわれたものではなく, 根本を見つめたものであるが, 本研究のように基礎的な部分を固め, 非線形方程式の数値計算の分野において更なる研究がなされることを望む.

謝辞

本研究を進めるに当たり、常に正しい道を示し終始懇切丁寧な御指導及び御激励を賜り, その他多くの面においてもいろいろと御面倒を見て頂き, 御助言を与えて下さいました柏木雅英助教授に深く感謝致します.

また, 卒業論文中間報告の際など, 機会あるごとに御指導, 御鞭撻を賜りました大石進一教授に深く感謝致します.

また, 日常生活においていろいろとお世話になりました, 柏木研究室助手相馬隆郎氏,D 2 宮田孝富氏,D 1 濱田吉信氏,M 1 岩折朱希嗣氏, 高崎大輔氏に深く感謝申し上げます.

また, 同じ非線形班として意見の交換や協力などをして下さいました柏木研究室 B 4 金谷卓充氏, 川上修氏, 小泉健氏, 桜井幹夫氏, 白井健一氏, 長友泰崇氏, 波多野伸哉氏, 深谷光統氏に深く感謝致します.

また,CG 班でありながら度重なる質問に対し, 御助言を下さいました柏木研究室 B 4 洲濱陽一氏に深く感謝申し上げます.

最後に研究だけでなく, 素晴らしい環境を提供し, 日ごろの生活の中でお世話になりました柏木研究室の皆様に深く感謝致します.

参考文献

[1] 大石進一: “数値計算”, 裳華房,1999.

[2] 大石進一: “非線形解析入門”, コロナ社,1997.

[3] 柏木雅英: “精度保証付きシミュレーション [1]-区間解析-”, 日本シミュレーション学会, “シミュレーション第 18 巻第 4 号”,1999