平成 11 年度

卒業論文

平均値形式を用いた
解の非存在領域の除去法

Removing method for nonexistence region of solution using the Mean Value Form

平成 12 年 2 月 4 日

指導教授： 柏木 雅英 助教授

早稲田大学理工学部情報学科

G96P031-1 金谷 卓充

目 次

1 序論 **1**

1.1 背景 2

1.2 本論文の目的 2

1.3 本論文の構成 2

2 準備 **4**

2.1 はじめに 5

2.2 区間と区間演算 5

2.2.1 区間 5

2.2.2 区間演算 5

2.3 区間演算の問題点とその解決法 6

2.3.1 区間演算の問題点 6

2.3.2 平均値形式 6

2.4 Krawczyk の方法 7

2.5 線形計画法の単体法における Phase-1 10

2.5.1 線形計画問題とは 10

2.5.2 線形計画問題の標準形 11

2.5.3 単体法 12

2.5.4 単体法のアルゴリズム 12

2.5.5 単体表について 13

2.5.6 a_{rj_s} を枢軸とする掃き出し 14
2.5.7 Phase-1 15
2.6 むすび 16

3 平均値形式を用いた
解の非存在領域の除去法 17
3.1 はじめに 18
3.2 全解探索法 18
3.3 平均値形式が表す領域 20
3.4 手法 1 21
3.4.1 手法 1 の概要 22
3.4.2 手法 1 22
3.5 手法 2 24
3.5.1 手法 2 の概要 24
3.5.2 手法 2 24
3.6 むすび 27

4 数値検証例 28
4.1 はじめに 29
4.2 問題例と実行結果 29
4.3 考察 31

謝 辞 34

参考文献 36

図 目 次

3.1 1 次元の場合に $M(I)$ が表す領域 22
3.2 1 次元の場合に手法 1 を用いた $M(I)$ が表す領域 25
3.3 1 次元の場合に手法 2 を用いた $M(I)$ が表す領域 26

4.1 従来法と MVF 法による非存在テストの比較 32
4.2 手法 1 と手法 2 の領域の比較 32

表 目 次

2.1 単体表 14
2.2 掃き出し後の単体表 15

4.1 実行例１ 30
4.2 実行例２ 30
4.3 実行例３ １回の非存在テストにかかる時間の比較 31

第 1 章

序論

1.1 背景

n 次元非線形方程式

$$f(x) = 0, \quad f : R^n \to R^n \tag{1.1}$$

を解くために Krawczyk の区間写像による全解探索が研究されている．この手法は探索する領域を分割していき，その分割された領域において解が存在する否かを全ての領域を対象に解を探索していく手法である．

非線形方程式の全ての解を効率良く求めようとした場合，解の存在性判定が重要であるとともに，逆に解の存在しない領域をいかに効率良く判定し，早い段階で探索領域から除去してやることも非常に重要である．しかし $0 \notin F(x)$ が成立した場合に解の非存在性が示される従来の方法では必ずしも強力な除去法とはいえず，また構造が複雑の非線形方程式を扱う場合には区間の分割が進み実用的ではない．そこで本論文では解の存在性の検証で用いる Krawczyk の方法にでてくる平均値形式を利用して，$f(x)$ を囲い込む線形な平面を作成し，文献 [1][4] で提案されている「単体法の Phase-1 による解の非存在性判定法」を用い，解の非存在領域の除去する方法を精度保証付きで実現する．

1.2 本論文の目的

本論文では，非線形方程式の全解探索を行う上で重要となる解の非存在領域の除去法について考え，従来の除去法より効率良く解の非存在性を判定し，全解探索法を高速に行うことを目的とする．

1.3 本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである．

第 2 章 本論文での準備として，区間演算及び Krawczyk の方法，線形計画法の単体法における Phase-1 についてそれぞれ説明する．

第 3 章　全解探索法のアルゴリズムについて述べ，本論である平均値形式を用いた，非存在テストの改良法を 2 つ提案する．

第 4 章　実際の数値例にて本論文のアルゴリズムを検証し考察する．

第 2 章

準備

2.1 はじめに

本章では平均値形式を用いた解の非存在領域の除去法を本論文にて検証する準備として，区間演算及び Krawczyk の方法 (文献 [2][3] 参照)，線形計画法の単体法における Phase-1 について説明する．

2.2 区間と区間演算

2.2.1 区間

区間解析において区間とは

$$[\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in R | \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\}, \underline{x} \leq \overline{x} \in R \tag{2.1}$$

と表される閉区間である．以下

$$[x] = [\underline{x}, \overline{x}] \tag{2.2}$$

と区間を表す．また，$\underline{x} = \overline{x}$ となる区間 $[x]$ は点区間という．点区間は実数だから点区間 $[x]$ の表す実数を x と書く．

区間 x について以下を定義する．

$$d([x]) = \overline{x} - \underline{x} \tag{2.3}$$

$$rad([x]) = \frac{\overline{x} - \underline{x}}{2} \tag{2.4}$$

$$mid([x]) = \frac{\underline{x} + \overline{x}}{2} \tag{2.5}$$

$d([x]), rad([x]), mid([x])$ を，それぞれの区間 $[x]$ の直径，半径，中心という．

2.2.2 区間演算

2 つの区間 $[x], [y]$ が与えられたとき，2 つの区間の四則演算を次で定義する．

$$[x] \circ [y] = \{x \circ y | x \in [x], y \in [y]\} \quad (\text{但し} \circ \in \{+, -, \times, /\}) \tag{2.6}$$

これを区間演算という．これより次が成立する．

$$\begin{aligned}
[x]+[y] &= [\underline{x}+\underline{y}, \overline{x}+\overline{y}] \\
[x]-[y] &= [\underline{x}-\overline{y}, \overline{x}-\underline{y}] \\
[x]\times[y] &= [min\{\underline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}\}, max\{\underline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}\}] \\
[x]/[y] &= [x]\times\left[\frac{1}{\overline{y}}, \frac{1}{\underline{y}}\right] \qquad (0 \notin [y])
\end{aligned} \tag{2.7}$$

関数

$$f(x), \quad f : R^n \to R^m \tag{2.8}$$

に対して，$I \in IR^n (IR = \{[a,b] | a \leq b, a, b \in R\})$ から出発して区間演算を行った結果を $F(I) \in IR^m$ とすると，

$$F(I) \supset \{f(x) | x \in I\} \tag{2.9}$$

を満たす．一般に区間を受け取り区間を返すような関数を区間写像という．また，f に対して式 (2.9) を満たすように作られた区間写像 $F : IR^n \to IR^m$ を，f の区間包囲という．

2.3 区間演算の問題点とその解決法

2.3.1 区間演算の問題点

区間演算の問題点の一つとして，確かに計算された区間は真の値を含むものの，区間幅が極端に広くなってしまうことが多い点が挙げられる．これは特に関数の値域を評価する場合など，比較的幅の広い区間を扱った場合に顕在化する．

2.3.2 平均値形式

第 2.3.1 で述べた区間演算における過大評価の問題を解決するための方法として変数間の相関性を考慮して計算を行う平均値形式 (Mean Value Form) が挙げられる．

関数

$$f(x), \quad f : R^n \to R^m \tag{2.10}$$

に対して，$I \in IR^n$ の像 $f(I) = \{f(x)|x \in I\}$ を評価することを考える．$x, c \in I$ に対して，平均値の定理

$$f(x) - f(c) = \int_0^1 f'(c + t(x - c))dt(x - c) \tag{2.11}$$

が成立する．ここで，

$$\int_0^1 f'(c + t(x - c))dt \in co\{f'(x)|x \in I\} \tag{2.12}$$

(co は凸包) が成立することを利用すると，$f(I) = \{f(x)|x \in I\}$ は

$$f(I) = f(c) + F'(I)(I - c) \tag{2.13}$$

のように評価できる．ここで F' は f の導関数 f' の区間包囲である．区間行列 $F'(I)$ は導関数 f' に区間 I を代入して区間演算を行ったものである．区間行列は凸集合であるから，凸包を考える必要は無い．c は入力区間 I に含まれる任意の点である．一般に c は区間 I の中心 $(c = mid(I))$ とする．

2.4 Krawczyk の方法

まず，準備として縮小写像の原理を示す．

定理 2.4.1 (縮小写像の原理) X を $d(x, y)$ を距離とする完備距離空間とし，$g : X \to X$ を全ての $x, y \in X$ に対して

$$d(g(x), g(y)) \leq \alpha d(x, y) \tag{2.14}$$

を満たすような写像とする．但し，$\alpha < 1$ とする．(この様な g は縮小写像，実数 α を縮小定数という．) この時，以下が成立する:

1. $g(x) = x$ を満たす点 x^*(不動点という) が X に唯一存在する．

2. x_0 を X 内の任意の点とし，点列 $\{x_k\}$ を

$$x_{k+1} = g(x_k) \tag{2.15}$$

で定めると，x_k は x^* に収束し，その収束速度は

$$d(x_k, x^*) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \tag{2.16}$$

で表される．

3. X 内の任意の点 x_0 に対して，

$$d(x_0, x^*) \leq \frac{d(g(x_0), x_0)}{1-\alpha} \tag{2.17}$$

上の定理は一般的な形で書いてあるが，本論文では n 次元ユークリッド空間 R^n を扱っているので，

$$\begin{aligned} X \quad &: \quad R^n \text{ 内の閉集合} \\ d(x,y) \quad &: \quad \|x-y\| (\text{但し ノルムは } \|x\| = max|x_i| \text{ で定める}) \end{aligned}$$

のように置き換える事ができる．

非線形方程式

$$f(x) = 0, \quad f : R^n \to R^n \tag{2.18}$$

の解の存在を保証するために，これを同値な不動点形式に変換し，不動点定理を適用する事を考える．$L : R^n \to R^n$ を近似解の近辺での f の傾きを近似する行列とすると，

$$x = x - L^{-1} f(x) \tag{2.19}$$

は式 (2.18) を同値な不動点形式に変換したものである．以下この右辺を $g(x)$ とおく．

$$g(x) = x - L^{-1} f(x) \tag{2.20}$$

L が逆行列を持つならば x が $f(x) = 0$ を満たす事と，x が $x = g(x)$ を満たすことは同値なので，以下 $x = g(x)$ の不動点の存在を示せば良い．区間 $I \subset R^n$ とし，I における g の不動点の存在性は以下の 2 つが示せれば良い．

1. $\{g(x) | x \in I\} \subset I$

2. g が I 上で縮小写像であること

前者は，区間演算を用いて

$$G(I) = I - L^{-1}F(I) \tag{2.21}$$

に対し，$G(I) \subset I$ が成り立てば良いが，区間演算の過大評価の原因となるよく似た傾きの関数の減算を行っているため，過大評価がおこり成立しない．よってこの過大評価を抑えるために 2.3.2 小節で述べた平均値形式を併用して示す．$c = mid(I)$，E を単位行列として

$$\begin{aligned} K(I) &= g(c) + G'(I)(I - c) \\ &= c - L^{-1}f(c) + (E - L^{-1}F'(I))(I - c) \end{aligned} \tag{2.22}$$

のような Krawczyk 写像 K について，

$$K(I) \subset I \tag{2.23}$$

を確認する．

後者については平均値の定理により，$x, y \in I$ ならば

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \max_{x \in I} \|g'(x)\| \|x - y\| \tag{2.24}$$

が成立する．ここで行列 $g'(x)$ のノルムは，

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \tag{2.25}$$

となるように定義されたもので，R^n のノルムが $max|x_i|$(最大値ノルム) ならば

$$\|A\| = \max_i \sum_j |A_{ij}| \tag{2.26}$$

となる．すなわち，区間行列のノルムを

$$\|A\| = \max_i \sum_j \max_{x \in A_{ij}} |x| \tag{2.27}$$

で定義し，

$$\|G'(I)\| = \|E - L^{-1}F'(I)\| < 1 \tag{2.28}$$

が成立すれば，g は I 上で縮小写像であることが言える．

以上をまとめると，次のようになる:

定理 2.4.2 (Krawczyk の方法) $f : R^n \to R^n$, $I \in IR^n$, $c = mid(I)$, $L \simeq f'(c)$ を正則行列，F' を f の区間包囲とする．

$$K(I) = c - L^{-1}f(c) + (E - L^{-1}F'(I))(I - c) \tag{2.29}$$

としたとき，

$$\begin{aligned} K(I) &\subset I \\ \|E - L^{-1}F'(I)\| &< 1 \end{aligned} \tag{2.30}$$

が成立するならば，以下が成立する:

1. 方程式 $f(x) = 0$ の解 x^* は I に唯一存在する．

2. x_0 を I 内の任意の点とし、点列 $\{x_k\}$ を

$$x_{k+1} = x_k - L^{-1}f(x_k) \tag{2.31}$$

で定めると，x_k は x^* に収束し，その収束速度は

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|L^{-1}f(x_0)\| \tag{2.32}$$

で表される．但し $\alpha = \|E - L^{-1}F'(I)\|$ である．

本論文では上の 1 の ‘解が区間 I に唯一存在する性質’ を利用し，全解探索法の存在テストを行う．

2.5 線形計画法の単体法における Phase-1

2.5.1 線形計画問題とは

線形計画問題とは，いくつかの変数の 1 次不等式と 1 次等式の条件の下で，それらの変数に関する 1 次式を最小化したりする問題をいう．

線形計画問題では $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を変数とする時，制約条件は一般に以下のように表される．

1. 1 次等式

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

2. 1 次不等式

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b$$

3. 変数の制約

$$x_i \leq d \quad or \quad x_i \geq d$$

この条件のもとで目的関数

$$z = z_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{2.33}$$

を最大化あるいは最小化する問題を線形計画問題という．

2.5.2 線形計画問題の標準形

線形計画問題の標準形は以下のように書ける．

最大化

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

条件

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{2.34}$$

$$x_1, \cdots, x_n \geq 0$$

このような問題の条件を満たすような最適解を求めるには単体法を用いる．単体法については次節で述べる．

2.5.3 単体法

式 (2.34) は以下に述べる方法で目的関数の値を改善していくのだが，その過程で何回か反復した後に次のものが得られたとする．

最大化

$$z = z_0 + c_{j_1} x_{j_1} + c_{j_2} x_{j_2} + \cdots + c_{jn} x_{jn}$$

条件

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_{i1} & = & b_1 & - & a_{1j_1} x_{j_1} & + & a_{1j_2} x_{j_2} & + & \cdots & + & a_{1j_l} x_{j_l} \\ x_{i2} & = & b_2 & - & a_{2j_1} x_{j_1} & + & a_{2j_2} x_{j_2} & + & \cdots & + & a_{2j_l} x_{j_l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_{im} & = & b_m & - & a_{mj_1} x_{j_1} & + & a_{mj_2} x_{j_2} & + & \cdots & + & a_{mj_l} x_{j_l} \end{array} \tag{2.35}$$

$$x_{i_1}, \cdots, x_{i_m} \geq 0, \quad x_{j_1}, \cdots, x_{j_l}, \quad b_i \geq 0, \quad i = 1, \cdots, m$$

ここで $x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}$ を基底変数，$x_{j_1}, \cdots, x_{j_l}$ を非基底変数といい，式 (2.35) を基底形式表現と呼ぶ．また非基底変数を全て 0 とおき，基底変数を定数項と等しくおいて得られる解を実行可能基底解という．

2.5.4 単体法のアルゴリズム

$b_i \geq 0, (i = 1, \cdots, m)$ を満たす実行可能な基底形式表現が得られているものとする．以下に単体法のアルゴリズムを示す．

アルゴリズム 2.5.1 (単体法アルゴリズム)

Step 1

- $c_{j_k} \leq 0 (k = 1, \cdots, l)$ なら終了,

  最適解は $x_{i_1} = b_1, \cdots, x_{i_m} = b_m,\ x_{j_k} = 0 (k = 1, \cdots, l)$ である．

- $c_{j_k} > 0$ なる j_k が存在するならば **Step 2** へ．

Step 2

$$c_{j_s} = \max_{1 \leq k \leq l} c_{j_k} \tag{2.36}$$

なる j_s を求める．

- $a_{ij_s} \leq 0 (i = 1, \cdots m)$ ならば目的関数 z を限りなく大きくする無限解が存在し終了．

- $a_{ij_s} > 0$ となる i が存在するならば **Step 3** へ．

Step 3

$$\frac{b_r}{a_{rj_s}} = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{ij_s}} \mid a_{ij_s} > 0 \right\} \tag{2.37}$$

なる r を求める．

- a_{rj_s} を枢軸とする掃き出しを行って **Step 1** に戻る．

2.5.5 単体表について

この小節では単体表について説明する．

まず，標準形を以下のように変形する．

$$
\begin{array}{lllllllllllllll}
-z_0 & = & -z & + & c_{j_1}x_{j_1} & + & c_{j_2}x_{j_2} & + & \cdots & + & c_{jn}x_{jn} & & & & \\
b_1 & = & & & a_{1j_1}x_{j_1} & + & a_{1j_2}x_{j_2} & + & \cdots & + & a_{1j_l}x_{j_l} & + & x_{i_1} & & \\
b_2 & = & & & a_{2j_1}x_{j_1} & + & a_{2j_2}x_{j_2} & + & \cdots & + & a_{2j_l}x_{j_l} & & & + & x_{i_2} \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & & \ddots \\
b_m & = & & & a_{mj_1}x_{j_1} & + & a_{mj_2}x_{j_2} & + & \cdots & + & a_{mj_l}x_{j_l} & & & & + \quad x_{i_m}
\end{array}
\tag{2.38}
$$

この式 (2.38) を単体表で表すと表 2.1 のようになる．

		$-z$	x_1	x_2	$\cdots$	x_s	$\cdots$	x_l	x_{l+1}	x_{l+2}	$\cdots$	x_{l+r}	$\cdots$	x_{l+m}
α_0	$-z_0$	1	γ_1	γ_2	$\cdots$	γ_s	$\cdots$	γ_l	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0
α_1	b_1	0	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1s}	$\cdots$	a_{1l}	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0
α_2	b_2	0	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2s}	$\cdots$	a_{2l}	0	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$
α_r	b_r	0	a_{r1}	a_{r2}	$\cdots$	a_{rs}	$\cdots$	a_{rl}	0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
α_m	b_m	0	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{ms}	$\cdots$	a_{ml}	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1

表 2.1: 単体表

2.5.6 a_{rj_s} を枢軸とする掃き出し

表 2.1 に a_{rj_s} を枢軸とする掃き出しを行うと表 2.2 のようになる．表 2.1, 表 2.2 の第 i 行 $(i = 1, \cdots, m)$ にある $l + m + 2$ 個の成分をもつ行ベクトルをそれぞれ $\alpha_i, \alpha'_i \ (i = 0, \cdots, m)$ とすると,

$$
\begin{array}{lll}
\alpha'_r & = & \dfrac{\alpha_r}{\alpha_{rs}} \\
\alpha'_i & = & \alpha_i - \alpha_{is}\alpha'_r, \quad (i = 0, 1, \cdots, r-1, r+1, \cdots, m)
\end{array}
\tag{2.39}
$$

となる．

		$-z$	x_1	x_2	$\cdots$	x_s	$\cdots$	x_l	x_{l+1}	x_{l+2}	$\cdots$	x_{l+r}	$\cdots$	x_{l+m}
α'_0	$-z'_0$	1	γ'_1	γ'_2	$\cdots$	0	$\cdots$	γ'_l	0	0	$\cdots$	γ'_{l+r}	$\cdots$	0
α'_1	b'_1	0	a'_{11}	a'_{12}	$\cdots$	0	$\cdots$	a'_{1l}	1	0	$\cdots$	a'_{1l+r}	$\cdots$	0
α'_2	b'_2	0	a'_{21}	a'_{22}	$\cdots$	0	$\cdots$	a'_{2l}	0	1	$\cdots$	a'_{2l+r}	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$
α'_r	b'_r	0	a'_{r1}	a'_{r2}	$\cdots$	1	$\cdots$	a'_{rl}	0	0	$\cdots$	a'_{rl+r}	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
α'_m	b'_m	0	a'_{m1}	a'_{m2}	$\cdots$	0	$\cdots$	a'_{ml}	0	0	$\cdots$	a'_{ml+r}	$\cdots$	1

表 2.2: 掃き出し後の単体表

2.5.7 Phase-1

線形計画問題の条件式が多くなると，条件を全て満たす解が存在しない可能性がある．そこで制約条件を全て満たす解が存在するか否かを判定するのが Phase-1 である．

まず表 2.1 において $b_i \geq 0 (i = 1, \cdots, m)$ とする．$b_i \geq 0$ ならば，両辺にあらかじめ (-1) をかけておき，制約条件が不等式ならば不等号の向きを逆にする．この条件の下で各方程式，又は不等式に対して，それぞれ 1 つずつの非負の人工変数 $x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}$ を導入し次のような問題を考える．これを Phase-1 問題という．

最大化

$$\omega = -x_{n+1} - x_{n+2} - \cdots - x_{n+m}$$

条件

$$\begin{array}{rcccccccc} x_{n+1} & = & b_1 & - & a_{11}x_1 & - & a_{12}x_2 & - \cdots - & a_{1n}x_n \\ x_{n+2} & = & b_2 & - & a_{21}x_1 & - & a_{22}x_2 & - \cdots - & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n+m} & = & b_m & - & a_{m1}x_1 & - & a_{m2}x_2 & - \cdots - & a_{mn}x_n \end{array} \tag{2.40}$$

$$x_1 \geq 0, \cdots, x_{n+1} \geq 0, \cdots, x_{n+m} \geq 0$$

この問題に単体法を適用すると，単体法のステップを繰り返すたびに ω は次第に大きくなるが，人工変数 $x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}$ は全て 0 以上の値をとるため ω は正にはなれない．従って巡回が無ければ，この問題が無限解を持つことはなく，必ず有限回の反復で最適解が得られる．この最適解の時の ω の値を ω^* とする．ここで $\omega^* < 0$ ならば制約条件を満たす実行可能解は存在しないことが分かる．なぜなら，実行可能解に対しては，人工変数 $x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}$ は全て 0 なので，$\omega^* = 0$ とならなければいけないからである．

2.6 むすび

本章では，準備として区間演算及び Krawczyk の方法，線形計画法の単体法における Phase-1 についての説明を行った．区間演算は数値を幅を持った区間として扱い，真解を含むように演算を行っていくものであった．Krawczyk の方法はある区間 I 内に方程式の解が唯一存在することを証明できた．また，Phase-1 は複数の方程式または不等式を満たす解が存在かどうかを調べる方法である．次章では全解探索法と平均値形式を用いた非存在テストの改良法について述べるが，存在テストでこの Krawczyk の方法を，非存在テストで Phase-1 をそれぞれ用いる．

第 3 章

平均値形式を用いた
解の非存在領域の除去法

3.1 はじめに

本章ではまず非存在テストで従来の区間演算を用いた全解探索法のアルゴリズムについて述べ，次に平均値形式をもちいた非存在テストの改良法を 2 つ提案する．

3.2 全解探索法

ここで従来の Krawczyk の方法による全解探索法について簡単に述べ，そのアルゴリズムを示す．

$$f(x) = 0, \quad f : R^n \to R^n \tag{3.1}$$

とする．ある区間 I について第 2.4 節の式 (2.21) で用いた $G(I)$ の導関数 $G'(I)$ は

$$G'(I) = E - L^{-1}F'(I) \tag{3.2}$$

式 (2.22) の Krawczyk 写像 K は

$$K(I) = c - L^{-1}f(c) + (E - L^{-1}F'(I))(I - c) \tag{3.3}$$

であった．但し,E は単位行列，c は区間 I の中心とする．また，L は正則な非区間行列で，I における微分の近似とする．

全解探索法は，まず与えられた区間に対して

- 解の存在テスト
- 解の非存在テスト

を行い, どちらかが成立すればそれで探索終了だが，どちらも成立しなければ区間を 2 分割し，それぞれについて同様のテストを再帰的に繰り返す．アルゴリズムは以下のようになる．

アルゴリズム 3.2.1 (全解探索アルゴリズム) $f : R^n \to R^n$、$I_0 \in IR^n$，F を f の区間包囲，F' を f の区間包囲とし，方程式 $f(x) = 0$ の I_0 内の全ての解を求める事を考える．

Step 1

区間のリスト $\mathcal{L}$ を $\mathcal{L} = \{I_0\}$ で初期化する．

Step 2

$\mathcal{L}$ が空なら終了．そうでなければ $\mathcal{L}$ から先頭の要素を取り出し I とする．

Step 3

$F(I)$ を計算し，$0 \notin F(I)$ ならば I に解は存在しない．**Step 2** へ．そうでなければ **Step 4** へ．

Step 4

ここで

$$\begin{cases} K(I) \subset I \\ \|G'(I)\| < 1 \end{cases} \tag{3.4}$$

が満たされるならば，I に唯一解が存在するので **Step 2** へ．そうでなければ **Step 5** へ．

Step 5

$K(I) \cap I = \emptyset$ ならば I に解は存在しない．**Step 2** へ．そうでなければ **Step 6** へ.

Step 6

I を I_1 と I_2 に分割し，L の末尾に追加する．**Step 2** へ．

この方法により，適当な条件の下で精度保証付きで全ての解が有限回の手間で求められる．本章では全解探索アルゴリズムの **Step 3** における解の非存在テストを平均値形式を用いて改良していく．

3.3 平均値形式が表す領域

以下，平均値形式 (Mean Value Form) を MVF と呼ぶ．

$$f(x) = 0, \quad f : R^n \to R^n$$

とする．ここで

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^t \tag{3.5}$$

但し t は転置をさす．また

$$I = \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\underline{x_1}, \overline{x_1}] \\ \vdots \\ [\underline{x_n}, \overline{x_n}] \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

$$c = mid(I) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\underline{x_1} + \overline{x_1}}{2} \\ \vdots \\ \frac{\underline{x_n} + \overline{x_n}}{2} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

まず，第 2.3.2 節の式 (2.13) で表した n 変数における MVF の式

$$f(I) = f(c) + F'(I)(I - c) \tag{3.8}$$

における $(I - c)$ の区間 I を変数 $x = \{x_i \in R | \underline{x_i} \leq x_i \leq \overline{x_i}, i = 1, 2, \cdots, n\}$ に置き換えた式を $M(I)$ とする．

$$M(I) = f(c) + F'(I)(x - c) \tag{3.9}$$

ここで

$$F'_{ij}(I_j) = \frac{\partial f_i}{\partial [\underline{x_j}, \overline{x}_j]} \tag{3.10}$$

と置くと，

$$
\begin{aligned}
F'(I) &= \begin{pmatrix}
F_{11}^{'}(I_1) & F_{12}^{'}(I_2) & \cdots & F_{1n}^{'}(I_n) \\
F_{21}^{'}(I_1) & F_{22}^{'}(I_2) & \cdots & F_{2n}^{'}(I_n) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
F_{n1}^{'}(I_1) & F_{n2}^{'}(I_2) & \cdots & F_{nn}^{'}(I_n)
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
[\underline{f'_{11}(I_1)}, \overline{f'_{11}(I_1)}] & [\underline{f'_{12}(I_2)}, \overline{f'_{12}(I_2)}] & \cdots & [\underline{f'_{1n}(I_n)}, \overline{f'_{1n}(I_n)}] \\
[\underline{f'_{21}(I_1)}, \overline{f'_{21}(I_1)}] & [\underline{f'_{22}(I_2)}, \overline{f'_{22}(I_2)}] & \cdots & [\underline{f'_{2n}(I_n)}, \overline{f'_{2n}(I_n)}] \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
[\underline{f'_{n1}(I_1)}, \overline{f'_{n1}(I_1)}] & [\underline{f'_{n2}(I_2)}, \overline{f'_{n2}(I_2)}] & \cdots & [\underline{f'_{nn}(I_n)}, \overline{f'_{nn}(I_n)}]
\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

である．$F'_{ij}(I_j)$ は傾きを表す区間である．今 $M(I)$ の第 i 行目の式を抽出したものを $M_i(I)$ とすると，

$$
M_i(I) = f_i(c) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}^{'}(I_j)(x_j - c_j) \tag{3.12}
$$

となる．この式 (3.12) は x_j に c_j を代入すると点をさし，他の値を代入すると区間を生成する．下の式 $(3.13)(3.14)$ と区間 I で囲まれた領域をさす．

$$
M_i(I)_{min} = f_i(c) + \sum_{j=1}^{n} \underline{f_{ij}^{'}(I_j)}(x_j - c_j) \tag{3.13}
$$

$$
M_i(I)_{max} = f_i(c) + \sum_{j=1}^{n} \overline{f_{ij}^{'}(I_j)}(x_j - c_j) \tag{3.14}
$$

1 次元で表すと，

$$
\begin{cases}
f(c) + \underline{f'(x)}(x - c) \\
f(c) + \overline{f'(x)}(x - c) \\
\underline{x} \leq x \leq \overline{x}
\end{cases}
\tag{3.15}
$$

で囲まれた，図 3.1 のようなリボン型の領域になる．

3.4 手法 1

第 3.3 節の $M(I)$ の式 (3.9) における領域の場合，非凸領域 (1 次元ではリボン型) が生成されるため，線形計画法を用いた解の非存在領域の除去法が使えない．

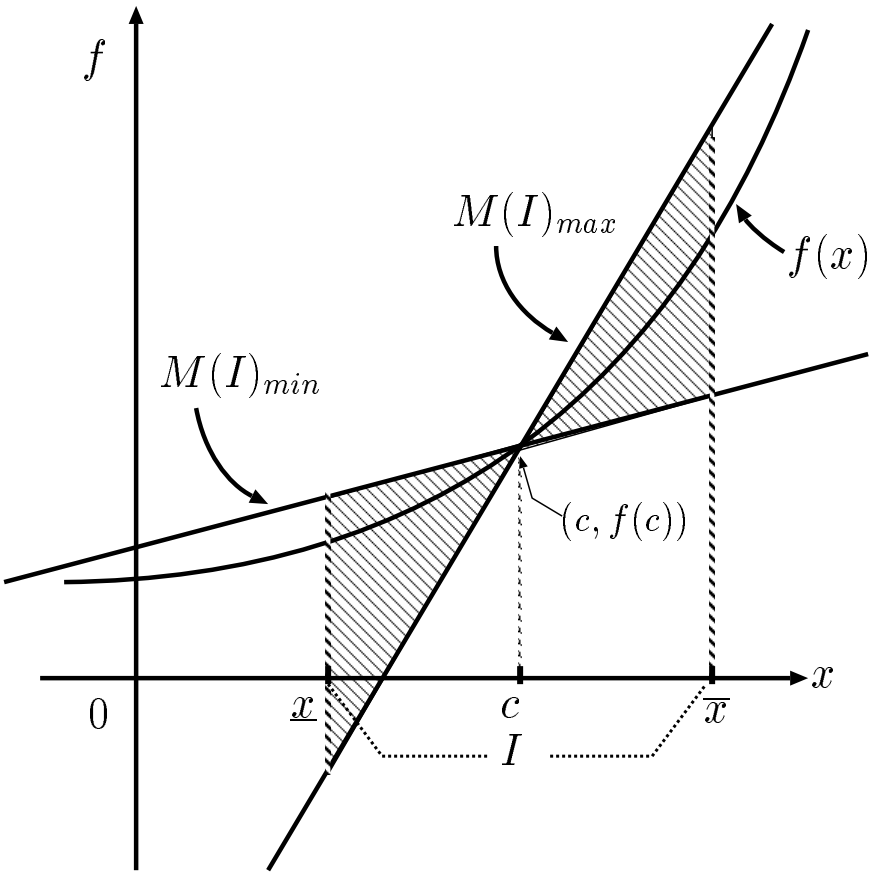

図 3.1: 1 次元の場合に $M(I)$ が表す領域

3.4.1 手法 1 の概要

式 $(3.13)(3.14)$ をそれぞれ $(\underline{x}, f(\underline{x})), (\overline{x}, f(\overline{x}))$ を通る点に平行移動させ, 4 つの線形な n 次超平面で囲まれた凸型の線形空間を生成させる．n 個の方程式 $(f_1, \cdots f_n)$ を同様に処理し，その n 個の線形空間に対して Phase-1 を用い，解の非存在領域の除去を行う．

3.4.2 手法 1

ある区間 I の下端・上端を中心とし，区間幅はそのままの区間 I_{min}, I_{max} における $M(I)$ の式を考える．各々の中心を c_{min}, c_{max} とおく．

$$c_{min} = (\underline{x_1}, \underline{x_2}, \ldots, \underline{x_n})^t, c_{max} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})^t \tag{3.16}$$

$$I_{min} = I - (c - c_{min}), \quad I_{max} = I - (c - c_{max}) \tag{3.17}$$

更に

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 - \underline{x_1} \\ \vdots \\ x_n - \underline{x_n} \end{pmatrix}, \quad \overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 - \overline{x_1} \\ \vdots \\ x_n - \overline{x_n} \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

とおく．但し，傾きを表す区間行列 $F'(I)$ は式 (3.11) を用いる．

$$M(I_{min}) = f(c_{min}) + F'(I)\underline{X} \tag{3.19}$$

$$M(I_{max}) = f(c_{max}) + F'(I)\overline{X} \tag{3.20}$$

のようになる．式 $(3.19)(3.20)$ は式 (3.9) を平行移動したものである．

$M(I_{min})$ の第 i 行目を抽出すると

$$M_i(I_{min}) = f_i(c_{min}) + \sum_{j=1}^{n} F'_{ij}(I_j)(x_j - \underline{x_j}) \tag{3.21}$$

この式 (3.21) は式 (3.12) と同様 x_j に I_{min} の中心 c_{min} を代入すると点になり，1 次元にするとリボン形の領域を表す．このとき上端のｎ次元超平面を $S_{i_{max}}$，下端のｎ次元超平面を $S_{i_{min}}$ とする．

$$S_{i_{min}} = f_i(c_{min}) + \sum_{j=1}^{n} \underline{f'_{ij}(x_j)}(x_j - \underline{x_j}) \tag{3.22}$$

$$S_{i_{max}} = f_i(c_{min}) + \sum_{j=1}^{n} \overline{f'_{ij}(x_j)}(x_j - \underline{x_j}) \tag{3.23}$$

式 $(3.22)(3.23)$ は区間 I においては

$$S_{i_{min}} \leq f_i \leq S_{i_{max}} \tag{3.24}$$

が成り立つ．式 (3.20) においても，上端のｎ次元超平面を $B_{i_{max}}$，下端のｎ次元超平面を $B_{i_{min}}$ とし

$$B_{i_{min}} = f_i(c_{max}) + \sum_{j=1}^{n} \underline{f'_{ij}(x_j)}(x_j - \overline{x_j}) \tag{3.25}$$

$$B_{i_{max}} = f_i(c_{max}) + \sum_{j=1}^{n} \overline{f'_{ij}(x_j)}(x_j - \overline{x_j}) \tag{3.26}$$

同様に式 $(3.25)(3.26)$ も区間 I において

$$B_{i_{min}} \leq f_i \leq B_{i_{max}} \tag{3.27}$$

が成り立つ．つまり区間 I の f_i において

$$\begin{aligned} f_i &\geq S_{i_{min}} \\ f_i &\leq S_{i_{max}} \\ f_i &\leq B_{i_{min}} \qquad ,(i = 1, 2, \cdots, n) \\ f_i &\geq B_{i_{max}} \\ \underline{x_i} &\leq x_i \leq \overline{x_i} \end{aligned} \tag{3.28}$$

となる．式 (3.28) の領域は全て凸型の線形空間を表す．1 次元で表すと図 3.2 のように f を平行四辺形で囲む領域を表す．

ここで式 (3.28) の線形 1 次不等式を第 $2.5.5$ 節の式 (2.38) の線形計画問題の制約条件式とすれば，解の非存在領域は $\mathrm{Phase\text{-}1}$ を解くことにより判定できる．このようにして解の非存在領域の除去を行う方法が手法 1 である．

3.5 手法 2

3.5.1 手法 2 の概要

式 $(3.13)(3.14)$ と区間 I の下端 $\underline{x}$ と上端 $\overline{x}$ との交点を求める．図 3.3 のように求めた交点の下方同士，上方同士を結んだ線形な n 次元超平面を作成する．この 2 つの平面と区間 I で囲まれた凸型の線形空間を各式 $(f_1, \cdots, f_n)$ にも適用し n 個作る．それを手法 1 と同様に線形計画法の $\mathrm{Phase\text{-}1}$ にあてはめ，解の非存在領域の除去を行うのが手法 2 である．

3.5.2 手法 2

第 $2.2.1$ 節の式 $(2.4)(2.5)$ より，

$$rad(I) = \frac{\overline{x} - \underline{x}}{2} \tag{3.29}$$

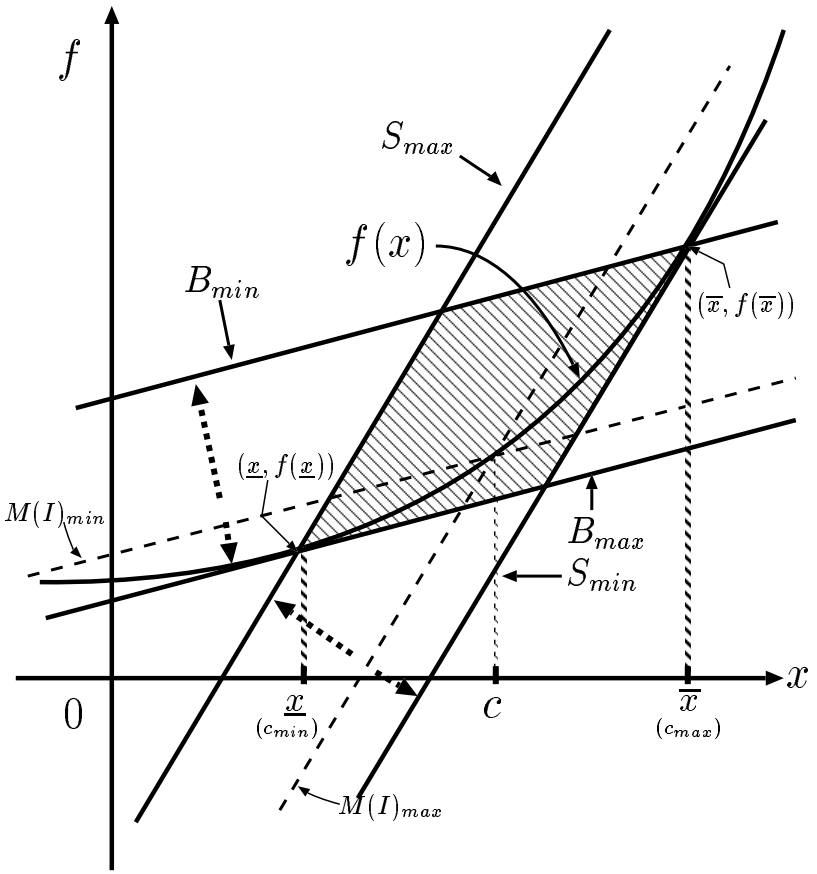

図 3.2: 1 次元の場合に手法 1 を用いた $M(I)$ が表す領域

$$mid(I) = \frac{\underline{x} + \overline{x}}{2} \tag{3.30}$$

であり，それぞれ半径，中心と読んだ．今，$M(I)$ の第 i 行目を抽出した式 (3.12) が表す領域の上端と下端の式 $(3.13)(3.14)$ と区間 I の上端と下端との交点を $P_1, \cdots, P_4$ とおくと、各点は

$$\begin{aligned}
P_1 &= (\underline{x_i}\ ,\ f_i(c) + \textstyle\sum_{j=1}^{n} \underline{f'_{ij}(I_j)}(\underline{x_j} - c_j)) \\
P_2 &= (\underline{x_i}\ ,\ f_i(c) + \textstyle\sum_{j=1}^{n} \overline{f'_{ij}(I_j)}(\underline{x_j} - c_j)) \\
P_3 &= (\overline{x_i}\ ,\ f_i(c) + \textstyle\sum_{j=1}^{n} \overline{f'_{ij}(I_j)}(\overline{x_j} - c_j)) \\
P_4 &= (\overline{x_i}\ ,\ f_i(c) + \textstyle\sum_{j=1}^{n} \underline{f'_{ij}(I_j)}(\overline{x_j} - c_j))
\end{aligned} \tag{3.31}$$

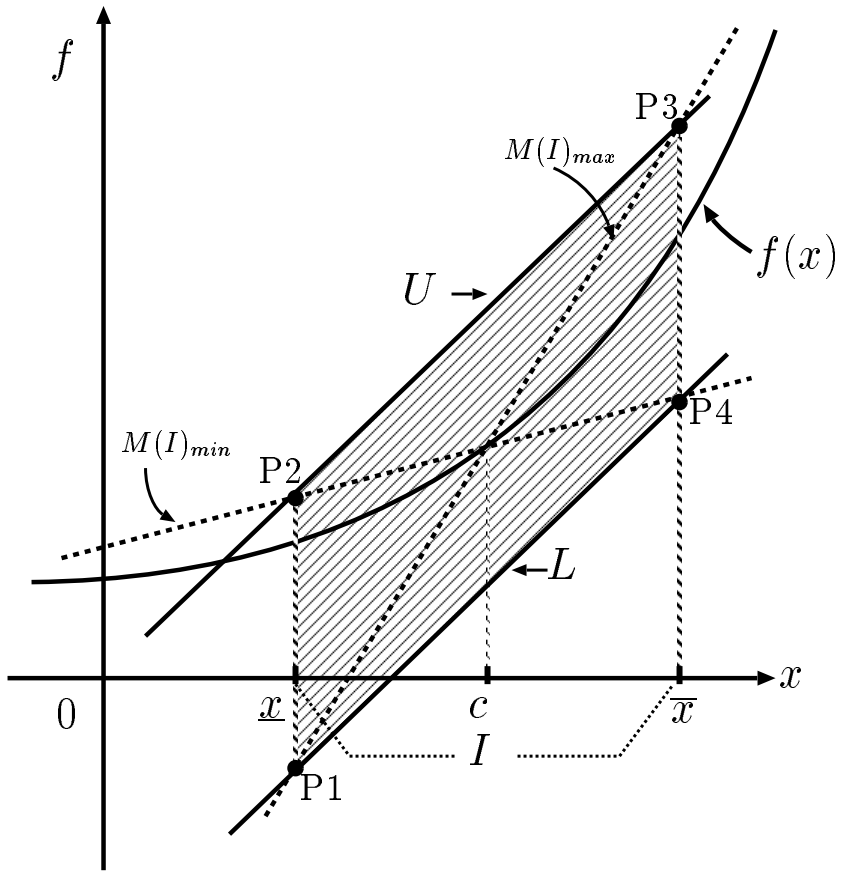

図 3.3: 1 次元の場合に手法 2 を用いた $M(I)$ が表す領域

と表せる．ここで f_i の下方同士つまり P_1 と P_4，上方同士 P_2 と P_3 を結ぶ平面をそれぞれ L_i, U_i とする．L_i, U_i は線形な n 次元超平面となり以下のように表せられる．

$$L_i = f(c_i) + \sum_{j=1}^{n} mid(F'_{ij}(I_j))(x_j - c_j) + \sum_{j=1}^{n} rad(F'_{ij}(I_j))(\underline{x_j} - c_j) \tag{3.32}$$

$$U_i = f(c_i) + \sum_{j=1}^{n} mid(F'_{ij}(I_j))(x_j - c_j) + \sum_{j=1}^{n} rad(F'_{ij}(I_j))(\overline{x_j} - c_j) \tag{3.33}$$

この 2 つの平面は区間 I において，

$$L_i \leq f_i \leq U_i \tag{3.34}$$

が成り立つ．つまり区間 I の f_i において

$$\begin{aligned} f_i &\geq L_i \\ f_i &\leq U_i \qquad ,(i = 1, 2, \cdots, n) \\ \underline{x_i} &\leq x_i \leq \overline{x_i} \end{aligned} \tag{3.35}$$

となる．式 (3.35) の領域は全て凸型の線形空間を表す．1 次元で表すと図 3.3 のような f を平行四辺形で囲む領域を表す．

ここで式 (3.35) の線形 1 次不等式を手法 1 と同様に線形計画問題の制約条件式とすれば，解の非存在領域は $\mathrm{Phase\text{-}1}$ を解くことにより判定できる．このようにして解の非存在領域の除去を行う方法が手法 2 である．

3.6 むすび

本章では，全解探索法のアルゴリズム及び解の非存在領域の除去法として新たに 2 つ提案した．従来の解の非存在領域の除去法では，区間内に少しでも全ての方程式が含まれる場合には存在領域として次の Step へ進んでいたが，提案した 2 種類の方法は，各々の方程式について凸型の線形空間で囲い込み，線形計画問題における単体法の $\mathrm{Phase\text{-}1}$ で解の存在・非存在を判別した．次章ではこの手法を実装し，実行結果を提示する．

:

第 4 章

数値検証例

4.1 はじめに

本章では以下にしめされる問題を例として取り上げ、従来の全解探索法と、非存在テストとして前章までに述べた平均値形式を用いた除去法 (手法１・手法２) を使った全解探索法との比較を行う．

なお本章で行う実験は全て “Free BSD 2.2.8 , compiler:gcc Ver.2.7.2.1,CPU:Pentium II 350MHz” で行った．

4.2 問題例と実行結果

$f(x)$ は

$$\begin{cases} g(x_1) + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ g(x_2) + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2 \\ \vdots \\ g(x_n) + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \end{cases} \tag{4.1}$$

で示され，$g(x)$ と区間 I は例題ごとに変えていく．実行結果として分割数と実行時間，解答数を出力した．

実行例１． $g(x), I$ を次のようにし，結果を表 4.1 に示す．

$$g_1(x) = -10.5x^2 + 11.8x \tag{4.2}$$

$$I_1 = (-0.5, 1.5)$$

実行例２． $g(x), I$ を次のようにし，結果を表 4.2 に示す．

$$g_2(x) = 2.5x^3 - 10.5x^2 + 11.8x \tag{4.3}$$

$$I_2 = (-0.1, 1.4)$$

実行例３． １回の非存在テストにかかる時間を表 4.3 に示す．$g(x), I$ は次のようにする．

$$g_3(x) = 11x \tag{4.4}$$

$$I_3 = (-3, 2)$$

n	全解探索法の種類	分割数	実行時間 (s)	解の個数
2	1. 従来法 2. 手法 1 3. 手法 2	170 26 36	0.046 0.015 0.015	4
4	1. 従来法 2. 手法 1 3. 手法 2	memory over 436 1140	× 1.23 3.38	16
6	1. 従来法 2. 手法 1 3. 手法 2	memory over 2786 memory over	× 38.3 ×	45

表 4.1: 実行例 1

n	全解探索法の種類	分割数	実行時間 (s)	解の個数
2	1. 従来法 2. 手法 1 3. 手法 2	132 18 20	0.031 0.007 0.007	1
4	1. 従来法 2. 手法 1 3. 手法 2	memory over 106 305	× 0.24 0.3	1
6	1. 従来法 2. 手法 1 3. 手法 2	memory over 444 986	× 3.33 5.35	1
8	1. 従来法 2. 手法 1 3. 手法 2	memory over 360 1708	× 6.45 21.6	解なし

表 4.2: 実行例 2

全解探索法の種類	$n = 10$	$n = 30$	$n = 50$
従来法	0	0	0
手法 1	0.0234	0.8906	4.8984
手法 2	0.0078	0.375	1.8281
解の有無	有	有	無

表 4.3: 実行例 3　1 回の非存在テストにかかる時間の比較

4.3　考察

以上のように実行例を 3 つ示し，それぞれ表 4.1 ~ 4.3 とした．これより以下のことが分かった．

- 本論文で述べた手法 2 がどの場合でも一番効率良く解の非存在領域の除去を行っている．

実行例 1 ・ 2 より，変数の数又は与える区間・式に関係なく従来法よりも手法 2 が，手法 2 より手法 1 が効率の良いことがわかる．また実行例 1 と 2 を比較すると，初期区間に含まれる解答数の多い方が分割する回数も多くなると思われる．これは，真解を含む区間が Krawczyk の方法の 2 つの条件 (式 (2.30)) を満たすまで区間を分割しなければならない為に分割が進むものと考えられる．

従来法と新しく提案した手法 (MVF 法とする) について考える．I 内で f が交点を持てば解は存在するので，図 4.1 の I では解は存在しない．しかし従来法は図 4.1 の左のように，区間 I 内に各 f が通っていれば真解が存在していなくても ‘存在している’ と値を返す．MVF 法では図 4.1 の右のように区間 I 内の各 f をそれぞれの方法 (手法 1 ・手法 2) で囲い込み，各領域全ての重複する箇所が区間 I にあった場合に存在性をいう為，この図の場合 ‘存在していない’ と値を返す．よって従来法より解の非存在領域の除去が効率良く行く．

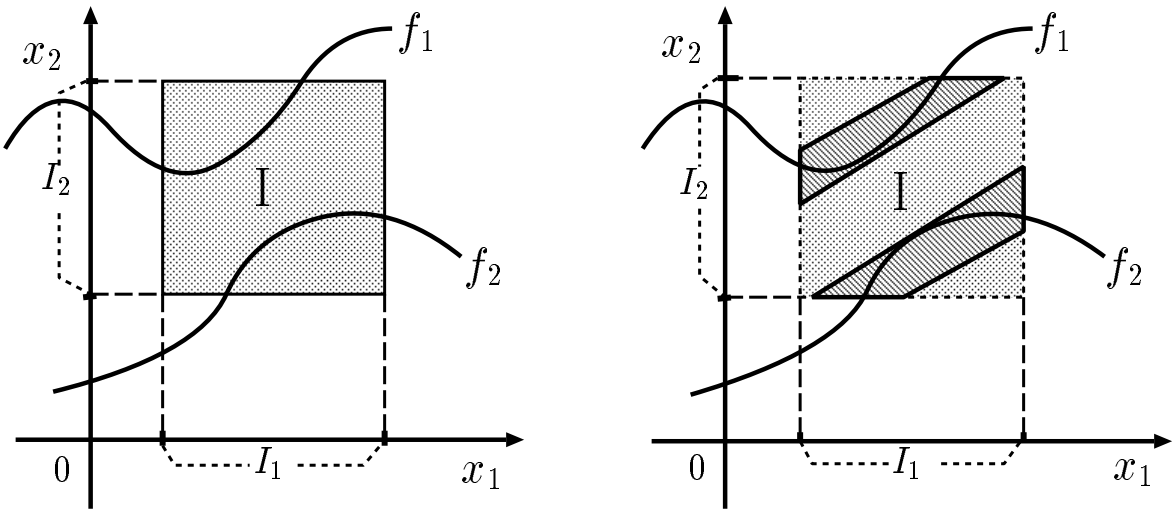

図 4.1: 従来法と MVF 法による非存在テストの比較

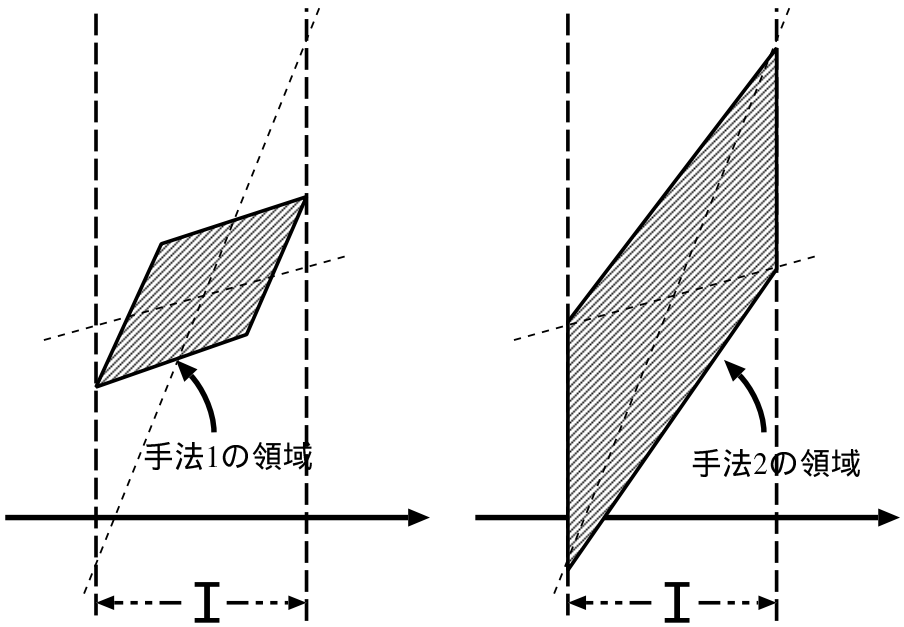

図 4.2: 手法 1 と手法 2 の領域の比較

また手法 1 は区間 I において 4 つの平面で f を囲い込んだが，手法 2 では図 (4.2) のように 2 つの平面で区間 I に蓋をする形で囲い込む．f を囲む領域は手法 1 の方が小さくなる分，非存在テストの効率は良くなる．しかし 1 回の非存在テストにかかる時間は表 4.3 のように従来法が最も早く，4 つの平面を作った手法 1 が最も遅くなっている．但し，表 4.3 の実行時間の単位は秒である．また計測可能な最小の時間が 0.0078125 秒であるため，従来法の実行時間 0 秒はそれ以下の時間を表す．

本論文では 4 則演算の多変数方程式について論じてきたが，三角関数や対数関数などの超越関数については実装していない．またメモリーの解放がうまくいかなかった為，10 変数以上の全解探索は今回実現していない．今後は 10 変数以上の多変数非線形方程式の問題で，超越関数を含む全解探索法を作る事が課題である．しかし，4 則演算の多変数方程式では本論文で述べた新しい全解探索法における解の非存在領域の除去法は有効であると言えた．

謝 辞

本論文の制作, 中間報告などにおいて非線形数値計算の分野にとどまらず, 度重なる御指導, 御鞭撻を賜わりました. 特に本論文の重要な要素である平均値形式については, 専門家ならではの非常に適切な御意見を頂きました, 柏木雅英 助教授に心より感謝致します.

また, 卒業論文中間報告の際など機会のあるごとに御指導, 御鞭撻を賜り, 研究に方向性を与えて下さった大石進一教授に深く感謝致します.

柏木研において柏木研助手 相馬隆郎 氏 , ならびに博士課程 2 年 宮田孝富 氏には, プログラムの Gauss 消去法, 自動微分など非線形の分野について熱心に御指導してくださいました. また, 日頃の柏木研究室内でのあらゆる面において御教示頂いたことに, 心より感謝申し上げます.

柏木研修士課程 1 年高崎大輔 氏には, 中間発表の準備の際に適切なアドバイスを頂き, 心より感謝申し上げます.

柏木研修士課程 1 年岩折朱希嗣 氏には, 私のコンピュータに関する稚拙な疑問にも親身に御指導を賜り, 心より感謝申し上げます.

最後に, 非線形班と CG 班の隔てなく, 楽しい時間をともに過ごした柏木研究室学部 4 年の皆様, 川上 修氏, 小泉 健氏, 櫻井幹夫氏, 白井 健一氏, 洲濱陽一氏, 長友 泰崇氏, 波多野伸哉氏, 深谷 光統氏, 村竹 範彦氏, 山田 浩之氏, 吉田 直史氏, 渡部 啓氏 に心より感謝致します.

参考文献

[1] K.Yamamura,“Interval solution of nonlinear equations using linear programming”,Proc.of IEEE1997 International Symposium on Circuits and Systems,pp.837-840,1997.

[2] 大石進一著,“応用解析セミナー数値計算”, 裳華房,1999

[3] 柏木雅英著,“精度保証つきシミュレーション [1] -区間解析-”, 平成 11 年 12 月日本シミュレーション学会 “シミュレーション第 18 巻第 4 号”

[4] 中原 徹:“精度保証付き単体法を用いた非線形方程式の解の非存在性判定法”, 平成 11 年度卒業論文 (大石研究室所属)