平成 11 年度

卒業論文

線形計画法を用いた全解探索法

Finding all solutions using linear programing

平成 12 年 2 月 4 日

指導教授： 柏木 雅英 助教授

早稲田大学理工学部情報学科

G96P100-9 波多野 伸哉

目 次

1 序論 **1**

1.1 はじめに 2

1.2 本論文の目的 2

1.3 本論文の構成 3

2 準備 **4**

2.1 はじめに 5

2.2 区間演算の用語について 5

2.3 ノルム空間 7

2.4 むすび 8

3 Krawczyk の方法とそれを用いた全解探索 **9**

3.1 はじめに 10

3.2 区間包囲、区間拡張 10

3.3 区間写像による方程式の表現 10

3.4 準備 11

3.5 Krawczyk の方法 12

3.6 Krawczyk 法を用いた全解探索法 16

3.6.1 流れ 16

3.6.2 領域除去法 17

3.6.3 解の唯一点の判定 17

3.7 むすび 18

4 シンプレックス法 19

4.1 はじめに 20

4.2 線形計画問題とは 20

4.3 線形計画問題の標準形 21

4.3.1 標準形 21

4.3.2 一般形から標準形への変換 21

4.4 シンプレックス法 22

4.4.1 アルゴリズム 23

4.4.2 Phase I 24

4.5 精度保証つきシンプレックス法 25

4.5.1 z の最小値の下限を求める場合 26

4.5.2 z の最小値の上限を求める場合 27

4.6 結び 27

5 線形計画法を用いた全解探索法 28

5.1 はじめに 29

5.2 解の非存在領域の除去法 29

5.2.1 Krawczyk 法を用いた全解探索法の問題点 29

5.2.2 線形計画法を用いた除去 30

5.3 解の唯一点の判定 31

5.4 むすび 32

6 実行結果 33

6.1 はじめに 34

6.2 実行結果 34

6.3 考察 35

7　結論 **41**

謝辞 **43**

参考文献 **45**

図 目 次

5.1 $f(x) \neq 0$ で $0 \in F(X)$ の例 30
5.2 y_{ij} の定義 31

表 目 次

6.1 各方法での実行結果の比較 35
6.2 求めた全解 $(n = 2 \sim 4)$ 36
6.3 求めた全解 $(n = 5)$ part1 37
6.4 求めた全解 $(n = 5)$ part2 38
6.5 求めた全解 $(n = 6)$ part1 39
6.6 求めた全解 $(n = 6)$ part2 40

第 1 章

序論

1.1 はじめに

非線形方程式

$$f(x) = 0$$

の全ての解を求めるアルゴリズムが [8] などで提案されている。そのアルゴリズムの流れは解の存在判定と解の非存在判定を行い、さらにどちらとも判定できない場合は区間を 2 分割して同様の作業を行うものである。

[8] では Krawczyk 写像を用いた方法を提案しているが、解の非存在判定の部分においては効率のいいものとは決していえず、小さな問題でも膨大な計算時間を要していた場合があった。

そこでその問題に対処するため、線形計画法の phase I を用いた解の非存在判定法が [1] で提案された。また、その方法は Krawczyk 写像を用いた方法より効率の良い判定がされることが示された。さらに [2] では、線形計画法の解法であるシンプレックス法に精度保証をつけた方法が提案され、その方法を用いることによって、より厳密な判定ができるようになった。

本論文では以上の 2 つの方法を比較し考えることにする。

1.2 本論文の目的

本論文では Krawczyk 写像を用いた方法と、解の非存在判定において精度保証付きシンプレックス法の phase I を用いた方法について、回路方程式を数値例を用いて実行したものを報告し、線形計画法を用いたもが有効であるかどうか実証する。

そして、精度保証付きシンプレックス法の phase I 解の非存在判定を用いたものが、全解探索のアルゴリズムとしても実用できる方法かも調べることにする。

1.3　本論文の構成

以下、本論文の構成について説明する。

第 2 章では、準備として区間演算の用語、ノルム空間について述べる。

第 3 章では、krawczyk の方法と、それを用いた全解探索法について述べる。

第 4 章では、線形計画法の解法であるシンプレックス法と、それに制度保証をつけた方法について述べる。

第 5 章では、本論文の主題である線形計画法を用いた全解探索法について説明する。

第 6 章では、第 3 章、第 5 章で述べた方法を用いて実際の数値例を用いた結果について述べる。

第 7 章では、本論文の結論について述べる。

第 2 章

準備

2.1　はじめに

本章では、本論文で用いる区間演算で使う用語とノルム空間について説明する。

2.2　区間演算の用語について

区間

R を実数全体の集合とすると、区間とは

$$[x, y] = \{r \in \mathbf{R} \mid x \leq y\} \tag{2.1}$$

と定義し、x を下限、y を上限と呼ぶ。また、その集合を $I(\mathbf{R})$ で表す。

等号

区間 $X = [p, q]$、$Y = [v, w]$ に関して、次のように等号を定義する。

$$X = Y \Leftrightarrow \{p = v \text{ かつ } q = w\} \tag{2.2}$$

区間ベクトル、区間行列

n 次元区間ベクトルは、ベクトル x を、

$$x = (x_1, \cdots, x_n)^t \ (x_1, \cdots, x_n \in I(\mathbf{R})) \tag{2.3}$$

と表し、その集合を $I(R^n)$ で表す。また、同様に $m \times n$ 区間行列 A を

$$A = (A_{11}, \cdots, A_{mn}) \ (A_{11}, \cdots, A_{mn} \in I(\mathbf{R})) \tag{2.4}$$

と表し、その集合を $I(\mathbf{R^{mn}})$ で表す。

区間の中心、半径、絶対値

区間 $I = [x, y] \in I(R)$ の中心 $\mathrm{mid}(I)$、半径 $\mathrm{rad}(I)$、絶対値 $|I|$ を

$$\mathrm{mid}(I) = \frac{x+y}{2} \tag{2.5}$$

$$\mathrm{rad}(I) = \frac{y-x}{2} \tag{2.6}$$

$$|I| = \max(|x|, |y|) \tag{2.7}$$

で定義する。また、区間ベクトル $x = (x_1, \cdots, x_n)^t$、区間行列 $A = (A_{11}, \cdots, A_{mn})$ の中心、半径、絶対値も

$$\mathrm{mid}(x) = (\mathrm{mid}(x_1), \cdots, \mathrm{mid}(x_n))^t \tag{2.8}$$

$$\mathrm{rad}(x) = (\mathrm{rad}(x_1), \cdots, \mathrm{rad}(x_n))^t \tag{2.9}$$

$$|x| = \max(|x_1|, \cdots |x_n|)^t \tag{2.10}$$

$$\mathrm{mid}(A) = (\mathrm{mid}(A_{11}), \cdots, \mathrm{mid}(A_{mn})) \tag{2.11}$$

$$\mathrm{rad}(A) = (\mathrm{rad}(A_{11}), \cdots, \mathrm{rad}(A_{mn})) \tag{2.12}$$

$$|A| = \max(|A_{11}|, \cdots, |A_{mn}|) \tag{2.13}$$

と定義する。

二項演算

区間の $X = [p, q], Y = [v, w] (X, Y \in I(\mathbf{R}))$ の間の演算は、通常の演算 $* \in \{+, -, \times, /\}$ に対して

$$X * Y = \{x * y \mid x \in X, y \in Y\} \tag{2.14}$$

と定義する。また区間演算では次のような式が成立する。

$$X + Y = [p + v, q + w] \tag{2.15}$$

$$X - Y = [p - w, q - v] \tag{2.16}$$

$$X \times Y = [\min\{pv, pw, qv, qw\}, \max\{pv, pw, qv, qw\}] \tag{2.17}$$

$$X/Y = [p, v] \times [\frac{1}{w}, \frac{1}{v}] \ (0 \notin y) \tag{2.18}$$

$$\tag{2.19}$$

となる。

2.3 ノルム空間

本論文では、ベクトルの長さを拡張した概念であるノルムを用いる。ここでは最大値ノルムを用いる。区間ベクトル $x \in I(\mathbf{R^n})$ に対して最大値ノルムは以下のように定義される。

$$\|x\| = \max_{1 \le i \le n} |x_i| \tag{2.20}$$

$$\tag{2.21}$$

また、ノルムは $\forall \alpha \in R$ に対して以下の性質を満たす。

$$\|x\| \geq 0 \ \ (\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0) \tag{2.22}$$

$$\|x\| = |\alpha|\|x\| \tag{2.23}$$

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\| \tag{2.24}$$

スケーリング最大値ノルム

与えられたスケーリングベクトル $u = (u_1, \cdots, u_n)^t \in \mathbf{R^n},\ u > 0$ に対して、区間ベクトル $I \in I(\mathbf{R^n})$ のノルムを

$$\|I\|_u = \max_{1 \le i \le n} \frac{|I_i|}{u_i} \tag{2.25}$$

で区間行列 $A \in I(\mathbf{R^{nn}})$ のノルムを

$$\|A\|_u = \max\{\|AI\|_u | \|I\|_u = 1\} = \||A|u\|_u \tag{2.26}$$

で定める。$u = (1, 1, \cdots, 1)^t$ のときは、通常の最大値ノルムになる。

2.4 むすび

本章では、非線形方程式の全解探索の準備として、区間演算で使う用語について述べた。ただ、区間演算は繰り返し行うと区間幅が広がり実用的でなくなる。次章では、区間幅を抑えるように工夫された krawczyk 法と、それを用いた全解探索法について述べる。

第 3 章

Krawczykの方法とそれを用いた全解探索

3.1 はじめに

ここでは、領域内に唯一解が存在するかどうかを判定する Krawczyk 法と、それを用いた全解探索法のアルゴリズムについて述べる。

3.2 区間包囲、区間拡張

関数

$$f(x),\ f:\mathbf{R^n}\to\mathbf{R^m} \tag{3.1}$$

に対して、$I\in I\mathbf{R^n}$ (IR は実数区間の集合、$I\mathbf{R}=\{[a,b]\mid a\le b, a,b\in\mathbf{R}\}$) から出発して区間演算を行った結果を $F(I)\in I\mathbf{R^m}$ ような $F:I\mathbf{R^n}\to I\mathbf{R^m}$ を区間写像という。また、

$$F(I)\supset\{f(x)\mid x\in I\} \tag{3.2}$$

を満たすような区間写像を f の区間包囲という。また、F が f の区間拡張であるとは、F が f の区間包囲で

$$F([x,x])=f(x)\ \ (x\in I) \tag{3.3}$$

が成立することを言う。

3.3 区間写像による方程式の表現

方程式を $f(x)=0$ と書くとき、非線形写像 f は一般的には計算機上で正確に表現できない。ここでは、f の計算機上の表現 F として f の区間包囲を用いる。この場合、出力の区間幅がそのまま誤差評価を表す。また通常は、解析の対象とする非線形写像は、性質のわかっている基本関数の組み合わせのものがほとんどなので、基本関数の区間包囲を作っておけば、ほとんどの非線形写像に対して自然に区間包囲が実現できることになる。

さらに任意項精度計算を可能にするため以下を仮定する。

仮定

f の区間包囲の族 $\{F_\varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0, F_\varepsilon : I(\mathbf{R^n}) \to I(\mathbf{R^m}))$ が存在して、以下を満たす:

任意の $c \in \mathbf{R^n}$ に対して、$|I_k - c| \to 0, \varepsilon_k \to 0 (k \to \infty)$ なる任意の列 $\{I_k, \varepsilon_k\}, I_k \in I(\mathbf{R^n})$, $\varepsilon_k > 0$ を考えると

$$\mathrm{rad}(F_{\varepsilon_k}, (I_k)) \to 0 \quad (k \to \infty) \tag{3.4}$$

が成立する。

この仮定を満たすように基本関数の区間包囲を構成できれば、それの組み合わせで構成される写像も仮定を満たすように作れる。

3.4 準備

まず、準備としていくつかの定理を示す。

定理 1 平均値形式

関数

$$f(x) \ (f : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^m}) \tag{3.5}$$

に対して、$I \in I\mathbf{R^n}$ の像 $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ を評価することを考える。$x, c \in I$ に対して、平均値の定理

$$f(x) - f(c) = \int_0^1 f'(c + t(x - c))dt(x - c) \tag{3.6}$$

が成立する。ここで、

$$\int_0^1 f'(c + t(x - c))dt \in \mathrm{co}\{f'(x) \mid x \in I\} \tag{3.7}$$

(co の凸包) が成立することを利用すると、$f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$

$$f(c) + F'(I)(I - c) \tag{3.8}$$

と評価できる。また、F' は f の導関数 f' の区間包囲である。

定理 2 縮小画像の原理

X を完備距離空間とし、$g : X \to X$ を全ての $x, y \in X$ に対して

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \alpha \|x - y\| \tag{3.9}$$

を満たすような写像とする。ただし、$\alpha < 1$ とする。(このような g を縮小画像、α を縮小定数という)。これが成立するなら以下が成立する:

1. $g(x) = x$ のを満たすような不動点 x^* が X に唯一存在する
2. x_0 を X 内の任意の点とし、点列 $\{x_k\}$ を

$$x_{k+1} = g(x_k) \tag{3.10}$$

で定めると、x_k は x^* に収束し、その収束速度は

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\| \tag{3.11}$$

で表される

3. X 内の任意の点 x_0 に対して、

$$\|x_0 - x^*\| \leq \frac{\|g(x_0) - x_0\|}{1 - \alpha} \tag{3.12}$$

3.5 Krawczyk の方法

非線形方程式

$$f(x) \ (f : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^m}) \tag{3.13}$$

の解の存在を保証するために、これを同値な不動点形式に変換し、不動点定理を適用することを考える。単純に

$$x = x + f(x) \tag{3.14}$$

のようにしても良いが、これでは右辺の縮小性が成立するかどうかは f によることになってしまう。近似解の近辺で縮小性を成立させるには、傾きを 0 に近づければ良い。そこで、$L : R^n \to R^n$ を近似解の近辺で f の傾きを近似する行列とし、これを用いて f の傾きを補正して

$$x = x - L^{-1} f(x) \tag{3.15}$$

のようにする ($f(x) = 0$ を $-L^{-1} f(x) = 0$ だったと考える)。以下この右辺を $g(x)$ とおく:

$$g(x) = x - L^{-1} f(x) \tag{3.16}$$

L が逆行列を持つならば x が $f(x) = 0$ 満たすことは同値なので、以下 $x = g(x)$ 不動点の存在を示すことを考えれば良い。以下、I に g の不動点が存在することを示すことを考える。示すべきことは、

1. $\{g(x) \mid x \in I\} \subset I$)g が I から I への写像であること
2. g が I 上で縮小画像であること

の 2 つである。

前者は区間演算を用いて

$$G(I) = x - L^{-1} F(I) \tag{3.17}$$

のように g に対する区間演算を用い、$G(I) \subset I$ を確認すれば容易に確認できるようだが、区間演算の減算の定義より、$c = a - b$ ならば、c の区間幅は a の区間幅と b の区間幅の和

になるので、$G(I) \subset I$ ならない。そこで、Krawczyk の方法では、平均値形式を用いて、c を I の中心として

$$\begin{aligned} K(I) &= g(c) + G'(I)(T - c) \\ &= c - l^{-1} f(c) + (E - L^{-1} F'(I))(I - c) \end{aligned} \tag{3.18}$$

(E は単位行列) のような Krawczyk 写像 K について

$$K(I) \subset I \tag{3.19}$$

を確認する。

後者の条件に関しては、次のように確認する。平均値の定理より、$x, y \in I$ ならば、

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \max_{x \in I} \|g'(x)\| \|x - y\| \tag{3.20}$$

が成立する。ここで行列 $g'(x)$ のノルムは

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \tag{3.21}$$

となるように定義されたもので、

$$\|A\| = \max_i \sum_j |A_{ij}| \tag{3.22}$$

で計算できる。すなわち、区間行列のノルムを

$$\|A\| = \max_i \sum_j \max_{x \in A_{ij}} |x| \tag{3.23}$$

で定義し、

$$\|A\| = \|E - L^{-1} F'(I)\| < 1 \tag{3.24}$$

が成立すれば、g は I 上で縮小写像であることが言える。

以上をまとめるの次のようになる

定理 3 Krawczyk の方法

$f : R^n \to R^n$、$I \in IR^n$、c を I の中心、$L \simeq f'(c)$ を正則な行列、F' を f の区間包囲とする。

$$K(I) = c - L^{-1}f(c) + (E - L^{-1}F'(I)(I - c)) \tag{3.25}$$

としたとき、

$$K(I) \quad \subset \quad I \tag{3.26}$$

$$\|E - L^{-1}F'(I)\| \quad < \quad 1 \tag{3.27}$$

が成立するなら以下が成立する:

1. 方程式 $f(x) = 0$ の解 x^* は I に唯一解を持つ

2. x_0 を I 内の任意の点とし、点列 $\{x_k\}$ を

$$x_{k+1} = x_k - L^{-1}f(x_k) \tag{3.28}$$

で定めると、x_k は x^* に収束し、その収束速度は

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{a^n}{1 - \alpha}\|L^{-1}f(x_0)\| \tag{3.29}$$

で表される。ただし、$\alpha = \|E - L^{-1}F'(I)\|$ である。

ここで、Krawczyk の方法に対して、十分良い近似解が与えられたとき、それに対する具体的な初期区間 T が与えられれば真解の包みこみが行えることを示す。

近似解を元にした近似解の包みこみ

$U \subset \mathbf{R^n}, f : U \to \mathbf{R^n}$ を C^1 級とし、$\mathbf{R^n}$ のノルムは $u > 0$ をスケーリングベクトルとする、スケーリング最大値ベクトルとする。$\{F_\varepsilon\}, \{F_\varepsilon{}'\}$ はそれぞれ f, f' の区間包囲の族で、仮定*.*を満たすとする。近似解 $c \in U$、精度 ε が与えられているとし、$\rho > 1$(定数) とする。

(1) 近似解 c に対して、$F_\varepsilon(c), F_\varepsilon{}'(c)$ を計算する

(2) $L \in F_\varepsilon{}'(c)$ を任意に決定

(3) L^{-1} が存在しなければ失敗。存在すれば $L^{-1}F_\varepsilon(c)$ を計算し、

$$\delta = \rho \| L^{-1} F_\varepsilon(c) \|_u \tag{3.30}$$

$$T = [-\delta u, \delta u] + c \tag{3.31}$$

とする。

(4) $M = E - L^{-1}F_\varepsilon{}'(T)$ とし、条件

$$c - L^{-1}F_\varepsilon(c) + M(T - c) \subset T \tag{3.32}$$

$$\| M \|_u < 1 \tag{3.33}$$

が成立すれば、区間 T に真解が唯一存在する。

3.6 Krawczyk 法を用いた全解探索法

3.6.1 流れ

Krawczyk 法を用いた非線形方程式 $f(x) = 0$ の全解探索では、n 次元直方体で与えられた初期領域を各変数方向に二分割しながら以下の手順を踏む。

- 解が存在しない領域内は除去する
- 解が一つだけ存在する領域に対しては、中心点を初期値としてニュートン法を適用し、その解を求める
- 解が存在するかわからない、あるいは一意的かどうかわからない領域に対しては、その領域を二分割し、それぞれに対して同様の手順を行う

3.6.2 領域除去法

領域 X に解が存在しないことを判定するのに、$f(x)$ の区間包囲 $F(X)$ を求める。$F(X)$ は X を定義域としたとき $f(x)$ の値域全体を含むので

$$0 \notin F(X) \tag{3.34}$$

ならば、X に解は存在しないので、ある i に対して $0 \notin F_i(X)$ になるような領域は除去をする。

3.6.3 解の唯一点の判定

次に Krawczyk 関数 $K(X)$ が式 (3.26) と式 (3.27) が $c = \mathrm{mid}(X)$ のときに、満たされるかどうか判定をする。それが成立すれば X に唯一解が存在し $x_0 = \mathrm{mid}(K(X))$ を初期値とするニュートン法で反復求解できる。

また、いずれも当てはまらない場合、X が式 $f(x) = 0$ の解を含むなら、$K(X)$ もその解を含むので、

$$X \cap F(X) = \emptyset \tag{3.35}$$

ならば、領域 X に解は存在しないので、その領域を除去する。

以上のいずれも当てはまらない場合、解の存在については何も判定できないので領域 X を二分割して同様の手順を繰り返す。

以上が Krawczyk 法を用いた全解探索法の概要である。

3.7　むすび

本章では Krawczyk 法と、それを用いた全解探索法について述べた。ただ、この方法は問題点があるが、これに関しては 5 章で述べることにする。次章は線形計画法の解法であるシンプレックス法について述べる。

第 4 章

シンプレックス法

4.1 はじめに

ここでは非線形方程式を全解探索する際の解の存在・非存在の判定に用いる線形計画問題についてと、その解法であるシンプレックス法、そして [2] で提案されているシンプレックス法に精度保証をつけたものに関して述べる。

4.2 線形計画問題とは

線形計画問題とは、いくつかの線形等式または、不等式で表された制約条件下で、1 次式で表された目的関数を最大化もしくは最小化する問題のことを言う。

一般には以下のような形で表される。

目的関数

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4.1}$$

を以下の制約条件

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad &\text{または} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \\ x_j \leq d_i \quad &\text{または} \quad x_j \geq d_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{4.2}$$

で最小値または最大値をを求める問題が線形計画問題である。

4.3　線形計画問題の標準形

4.3.1　標準形

以下の形は線形計画法の標準形である。

$$\text{最小化：} \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4.3}$$

$$\text{条件：} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{4.4}$$

$$x_j \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.5}$$

ここで、z の最大値を求めたい場合は単に式 (4.3) の右辺に (-1) をかけるだけでいい。

次に、式 (4.2) を標準形にまとめる方法を書く。

4.3.2　一般形から標準形への変換

不等式制約条件を等式条件へ

$$\text{条件：} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{4.6}$$

$$x_j \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

のような場合、以下の条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + z_i = b_i \tag{4.7}$$

を満たす非負の変数 (スラック変数という)z_i を導入する。また、不等号の向きが逆ならば $-z_i$ をかわりに導入する。

自由変数の取り扱い

自由変数とは、正の値も負の値もとることのできる変数であるが、以下のように取り扱う。

x_j が自由変数のとき、どんな実数も 2 つの非負の実数の差としてあらわすことができる事を利用して、

$$x_j = x_j' - x_j'' \tag{4.8}$$

$$x_j' \geq 0 \tag{4.9}$$

$$x_j'' \geq 0 \tag{4.10}$$

と分解し、問題に現れる x_j の項をすべて $x_j' - x_j''$ で置きかえる。しかし、この方法では 1 つの自由変数に対して 2 個の非負変数が必要なので、自由変数の個数が多いとかなり変数が増加するという問題がある。そこで、これを防止するため k 個の自由変数 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ が含まれるときは、その各々に対応する 1 つの非負変数と全てに共通な 1 つの非負変数 x_0 を用いて

$$x_j = x_j' - x_0 \tag{4.11}$$

$$x_j' \geq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, k) \tag{4.12}$$

$$x_0 \geq 0 \tag{4.13}$$

と分解すれば変数は 1 個増加するだけですむ。ただし

$$x_0 = \max\{0, -\min_{1 \leq j \leq k} x_j\} \tag{4.14}$$

とする。

4.4 シンプレックス法

ここでは、線形計画問題解決のための手法であるシンプレックス法について論じる。式 (4.3)-(4.5) で、$j \notin \{k_1, \cdots, k_m\}$ で $x_j = 0$ とした式 (4.4) の解 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ を基底解とい

う。また、$x_j \in \{k_1, \cdots, k_m\}$ を基底変数、また $x_j \notin \{k_1, \cdots, k_m\}$ を非基底変数という。さらに式 (5.5) が満たされる解は、実行可能基底解という。

また、式 (4.3)-(4.4) を以下のような式に変形することができる。

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j = e_j \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{4.15}$$

$$z + \sum_{j=1}^{n} p_j x_j = q \tag{4.16}$$

$$\text{where} \quad d_{ij} = \begin{cases} 1 & (l = i) \\ 0 & (l \neq i) \end{cases} \tag{4.17}$$

$$p_j = 0 \tag{4.18}$$

$$\text{when} \quad j \geq k_1 \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{4.19}$$

これは基底形式と呼ばれる形式で、この形式では、e_i は基底解を示し、q はその基底解に対する目的関数の値となる。

4.4.1 アルゴリズム

ここでは、シンプレックス法のアルゴリズムの説明をしたい。ここで書くアルゴリズムは [2] で説明されているアルゴリズムを参考にしている。

基底変数が $x_j \in \{k_1, \cdots, k_m\}$ で、それに対する基底解は実行可能であるとする。

1. 以下のような $s \notin \{k_1, \cdots, k_m\}$ を得る

$$\max_{j \notin \{k_1, \cdots, k_m\}} p_j = p_s \tag{4.20}$$

   もし、$p_s \leq 0$ ならば最適解は q となる

2. 以下のような集合を得る

$$I = \{i | d_{is} > 0\} \tag{4.21}$$

もし、$I = \emptyset$ ならば最適解は存在しない。

3. 以下のような $r \in I$ を得る

$$\min_{i \in I} \frac{e_i}{d_{is}} = \frac{e_r}{d_{rs}} \tag{4.22}$$

4. x_r を基底変数から取り除き、新たに x_s を基底変数に加える。そして、新しい基底変数の基底形式で計算する。(新しい基底形式の数値は "$'$" で示すことにする。)

(a) 以下のように r 列目を d_{rs} で割る

$$d'_{rj} = \frac{d_{rj}}{d_{rs}} \quad (j = 1, \cdots, n) \tag{4.23}$$

$$e'_{rj} = \frac{e_r}{d_{rs}} \tag{4.24}$$

(b) i 列目 (ただし、$(i \neq r)$) から r 列目 $\times d_{is}$ を引く

$$d'_{ij} = d_{ij} - d_{is} d'_{rj} \quad (j = 1, \cdots, n) \tag{4.25}$$

$$e'_i = d_i - d_{is} e_r \tag{4.26}$$

(c) 目的関数から r 列目 $\times p_s$ を引く

$$p'_j = p_j - p_s d'_{rj} \quad (j = 1, \cdots, n) \tag{4.27}$$

$$z' = z - p_s e'_r \tag{4.28}$$

5. 1. へ戻る

4.4.2 Phase I

線形計画問題も制約条件の式が多くなると実行可能な解が存在しない可能性がある。その存在の判定をするのが Phase I である。

式 (4.1)-(4.3) の線形計画問題についてまた考える。線形計画問題の基底形式の条件式 (4.4) を以下のように書きかえる。また、$b_i < 0$ の時は、両辺に (-1) をかける。

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j + y_i = b_j \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{4.29}$$

$$y_i \geq 0 \tag{4.30}$$

ここで加えられた $y_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ を人為変数と呼ぶ。ここで、z の最小化のかわりに、

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

の最小化についてシンプレックス法を適用してみる。すると、人為変数も非負なので、最適解が得られたときは $y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0$ となるはずである。もしそうでなければ、式 (4.4) の等式を満たす解が存在しないことになり線形計画問題が実行不能であることを意味する。つまり、$y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0,\ \omega = 0$ となるはずである。

4.5 精度保証つきシンプレックス法

以下の条件が与えられているとする

$$\begin{aligned} z + \sum_{j=1}^{n} p_j x_j &= q \\ \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j &= e_j \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \\ x_j &\geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{4.31}$$

基底変数 $x_j \in \{k_1, \cdots, k_m\}$ に関して、式 (4.10) と式 (4.11) を満足するとする。

また、z のとりうる範囲を I として、式 (4.24) を改良した次の問題を考える。

$$z' + \sum_{j=1}^{n} p_j x_j = q'$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} {d'}_{ij} x_j &= {e'}_j \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \\
x_j &\geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \\
{d'}_{ij} &\leq d_{ij} \\
{e'}_j &\geq e_i
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

また z' のとりうる範囲を I' とすると $I' \supset I$ となる。

4.5.1 z の最小値の下限を求める場合

ここでは、z の最小値の下限を求める場合について考える。

式 (4.24) の結果は式 (4.25) を満たすように計算しなければならない。

つまり、

d_{ij} 下への丸め

q 下への丸め

e_j 上への丸め

p_j 上への丸め

の手順を行う。

アルゴリズム

基本的には先ほど書いた 4.1 のアルゴリズムの手順を踏む。変更点は以下の通りである。

1. 乗算、除算は区間演算で行う
2. 3. において、r が定まらない場合、d_{is} をわずかに下向き、d_i をわずかに上向きにして r を決定できるようにする

3. この作業によって得られた d_{ij}、q、e_j、p_j を先ほどの書いた方向に丸める

4.5.2 z の最小値の上限を求める場合

ここでは、z の最小値の下限を求める場合について考える。

式 (25) の式の不等号の向きを逆にして、また z' のとりうる範囲を I'' とすると $I \supset I''$ となる。また、各変数の丸めの向きを逆にし、$4.5.1$ のアルゴリズムの $2.$ ようなことがある時も、丸めの向きを逆にすれば、z の最小値の最大値が求まる。

また、本論文では解の存在・非存在において、制度保証つきのシンプレックス法の Phase I を用いる。また、浮動小数点を演算を利用するので、この制度保証に関しても、この方法を満たすような方向で丸めることにする。よって、下限を求める時と、上限を求めるときの 2 回 Phase I 問題を求め、z の真の解を含む区間を求める。

4.6 結び

本章では、線形計画問題についてと、その解法であるシンプレックス法についてと、その制度保証について述べた。次の章では、非存在領域除去にこの方法を用いた全解探索法について述べる。

第 5 章

線形計画法を用いた全解探索法

5.1 はじめに

ここでは、本論文の本題である非線形項を含む連立方程式

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_j) + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}x_j - s_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{5.1}$$

の線形計画法を用いた全解探索のアルゴリズムについて説明する。またこのアルゴリズムは 3.6 節で説明したものよりも効率のいいものであることを示す。

以下、必要に応じて式 (5.1) を

$$f(x) = 0 \tag{5.2}$$

のようにベクトル表記をする。

さらに以下、n 次元区間ベクトルで与えられる直方体領域

$$X = ([a_1, b_1], \cdots, [a_n, b_n])^T \tag{5.3}$$

について考える

5.2 解の非存在領域の除去法

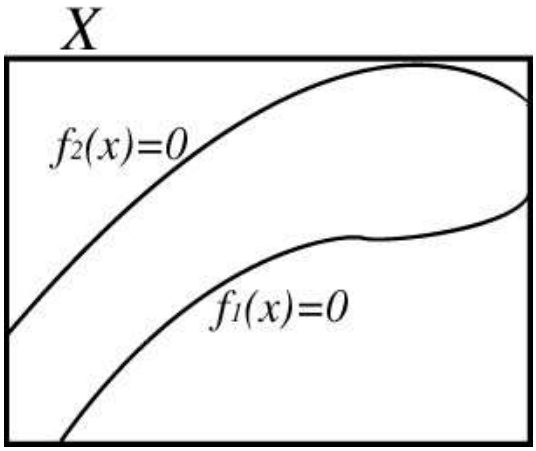
本節では、非線形方程式 $f(x) = 0$ の解の非存在領域の除去法について述べる。ここでは、3.6.2 節で用いた方法の問題点と、[1] で提案されている線形計画法を用いた方法について説明する。

5.2.1 Krawczyk 法を用いた全解探索法の問題点

3.6.2 節では

$$0 \notin F(X) \tag{5.4}$$

図 5.1: $f(x) \neq 0$ で $0 \in F(X)$ の例



ならば、X に解は存在しないので、式 (5.4) が成立するような範囲を除去をする方法をとった。しかし、この方法には問題点がある。

それは、$0 \in F(X)$ は X に解が存在することの必要条件でしかないという点である。そのため、図 5.1 のように実際には解の存在しない領域でも $0 \in F(X)$ が成立することは非常に多く、そのため探索領域数が多くなるという問題を抱えている。

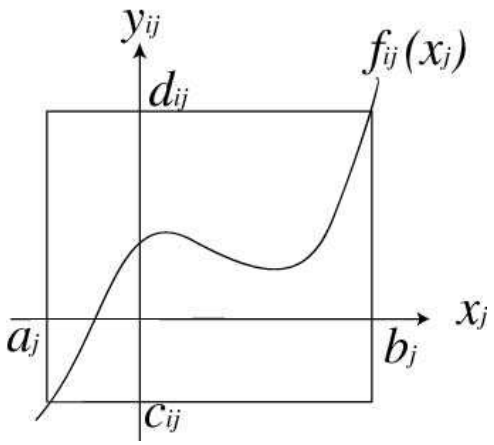
そこで、次節はより強力な領域除去法である、線形計画法を用いたものを説明する。

5.2.2 線形計画法を用いた除去

ここで式 (5.1) の非線形部分 $f_{ij}(x_j)$ の $i, j = 1, 2, \cdots, n$ の時の定義域の区間 $[a_j, b_j]$ した時の値域の区間 $[c_{ij}, d_{ij}]$ とする。このとき、補助変数 y_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ を導入して、$y_{ij} = f_{ij}(x_j)$ とすると、$a_j \leq x_j \leq b_j$ のとき、$c_{ij} \leq y_{ij} \leq d_{ij}$ が成立する。

ここで、以下のような線形計画問題を考える。

図 5.2: y_{ij} の定義



最小化: 任意の関数

条件:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}x_j - s_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots n)$$

$$\begin{aligned} a_j \leq \quad x_j \quad &\leq b_j \ (j = 1, 2, \cdots, n) \\ c_{ij} \leq \quad y_{ij} \quad &\leq d_{ij} \ (i, j = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{5.5}$$

式 (5.5) の実行可能領域は、領域 X おける式 (5.1) の全ての解を含む凸多面体となる。したがって、領域 X が式 (5.5) の制約条件を満たす実行可能領域が空ならば、X に解は存在しないことになり、領域 X を除去すればいいことになる。

また、式 (5.5) が実行可能領域が空集合か否かは $\mathrm{Phase\ I}$ により、確認することができる。

5.3 解の唯一点の判定

次に領域内に真解が唯一存在するかどうかの判定だが、3.6.3 節で説明したものと同様の作業を行う。

5.4　むすび

本章では、線形計画法を用いた全解探索法の方法について述べた。次の章では、3 章で述べた方法と本章で述べた方法を比較し、プログラムを実行してみた。

第 6 章

実行結果

6.1 はじめに

本章では、文献 [5] で提案されているエサキダイオードからなる非線形抵抗回路を例として取り上げ、全解探索を試みた。そして、従来の方法と線形計画法を用いたものの比較と、線形計画法を用いたもので出した解をここに書く。

6.2 実行結果

エサキダイオードからなる非線形抵抗回路の回路方程式は

$$\begin{cases} g(x_1) + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ g(x_2) + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ g(x_n) + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \end{cases} \tag{6.1}$$

と示され、エサキダイオードの V-I 特性を

$$g(x) = 2.5x^3 - 10.5x^2 + 11.8x \tag{6.2}$$

とする。

定義域を $([-1,4],[-1,4],\cdots,[-1,4])$ として計算してみた
実行時間の比較を表 6.1 に示す。使用計算機は Windows98, CPU:Pentium III 450MHz、使用言語は C 言語である。ただし、”—”の部分は実用時間内での測定が難しかったものである。

次に、線形計画法を用いたアルゴリズムで求めた解を唯一含む区間を表 6.2-表 6.6 に示す

表 6.1: 各方法での実行結果の比較

n	解の数	従来の方法		線形計画法を用いた方法	
		探索領域数	計算時間 (秒)	探索領域数	計算時間 (秒)
2	1	496	7.36	20	8.35
3	1	2847	59.98	60	43.22
4	3	14262	510.53	325	460.88
5	5	—	—	1160	3253.18
6	5	—	—	2098	14183.63

6.3 考察

結果からも分かるように n が大きくなればなるほど線形計画法を用いた全解探索のアルゴリズムの有効性を示せた。特に、「検索領域数の少なさ=強力な除去法」ということを示せた。

また、全解探索のアルゴリズムが領域の 2 分割を永久に続けることなく終了することも同時に示せた。

表 6.2: 求めた全解 $(n = 2 \sim 4)$

n			解を唯一含む区間
2		x_1	$[0.06445312500000, 0.07421875000000]$
		x_2	$[0.17187500000000, 0.18164062500000]$
3		x_1	$[0.04492187500000, 0.04736328125000]$
		x_2	$[0.14746093750000, 0.14990234375000]$
		x_3	$[0.27685546875000, 0.27929687500000]$
4	#1	x_1	$[0.01806640625000, 0.02050781250000]$
		x_2	$[0.11328125000000, 0.11572265625000]$
		x_3	$[0.23291015625000, 0.23535156250000]$
		x_4	$[0.40380859375000, 0.40625000000000]$
	#2	x_1	$[-0.05517578125000, -0.05273437500000]$
		x_2	$[0.02783203125000, 0.03027343750000]$
		x_3	$[0.12548828125000, 0.12792968750000]$
		x_4	$[1.56347656250000, 1.56591796875000]$
	#3	x_1	$[-0.09301757812500, -0.09240722656250]$
		x_2	$[-0.01611328125000, -0.01550292968750]$
		x_3	$[0.07299804687500, 0.07421875000000]$
		x_4	$[2.22387695312500, 2.22509765625000]$

表 6.3: 求めた全解 $(n = 5)$ part1

n			解を唯一含む区間
5	#1	x_1	$[-0.01428222656250, -0.01367187500000]$
		x_2	$[0.07482910156250, 0.07543945312500]$
		x_3	$[0.18347167968750, 0.18408203125000]$
		x_4	$[0.32812500000000, 0.32873535156250]$
		x_5	$[0.59484863281250, 0.59576416015625]$
	#2	x_1	$[-0.04632568359375, -0.04571533203125]$
		x_2	$[0.03790283203125, 0.03820800781250]$
		x_3	$[0.13769531250000, 0.13800048828125]$
		x_4	$[0.26464843750000, 0.26495361328125]$
		x_5	$[1.17041015625000, 1.17102050781250]$

表 6.4: 求めた全解 $(n = 5)$ part2

n			解を唯一含む区間
5	#3	x_1	$[-0.11376953125000, -0.11254882812500]$
		x_2	$[-0.03930664062500, -0.03808593750000]$
		x_3	$[0.04614257812500, 0.04736328125000]$
		x_4	$[0.14746093750000, 0.14990234375000]$
		x_5	$[2.42529296875000, 2.42773437500000]$
	#4	x_1	$[-0.08447265625000, -0.08432006835938]$
		x_2	$[-0.00619506835938, -0.00604248046875]$
		x_3	$[0.08474731445312, 0.08489990234375]$
		x_4	$[1.73246765136718, 1.73284912109375]$
		x_5	$[0.34552001953125, 0.34582519531250]$
	#5	x_1	$[-0.10461425781250, -0.10430908203125]$
		x_2	$[-0.02893066406250, -0.02862548828125]$
		x_3	$[0.05804443359375, 0.05834960937500]$
		x_4	$[2.12561035156250, 2.12591552734375]$
		x_5	$[0.29791259765625, 0.29821777343750]$

表 6.5: 求めた全解 $(n = 6)$ part1

n			解を唯一含む区間
6	#1	x_1	$[-0.09027099609375, -0.08996582031250]$
		x_2	$[-0.01275634765625, -0.01245117187500]$
		x_3	$[0.07696533203125, 0.07757568359375]$
		x_4	$[0.18591308593750, 0.18652343750000]$
		x_5	$[1.38220214843750, 1.38281250000000]$
		x_6	$[0.60522460937500, 0.60598754882812]$
	#2	x_1	$[-0.13208007812500, -0.13085937500000]$
		x_2	$[-0.06005859375000, -0.05883789062500]$
		x_3	$[0.02172851562500, 0.02294921875000]$
		x_4	$[0.11816406250000, 0.11938476562500]$
		x_5	$[0.23901367187500, 0.24023437500000]$
		x_6	$[2.54736328125000, 2.54980468750000]$

表 6.6: 求めた全解 $(n = 6)$ part2

n			解を唯一含む区間
6	#3	x_1	$[-0.13635253906250, -0.13619995117188]$
		x_2	$[-0.06494140625000, -0.06463623046875]$
		x_3	$[0.01623535156250, 0.01654052734375]$
		x_4	$[0.11160278320312, 0.11175537109375]$
		x_5	$[1.61901855468750, 1.61932373046875]$
		x_6	$[1.26287841796875, 1.26318359375000]$
	#4	x_1	$[-0.13146972656250, -0.13085937500000]$
		x_2	$[-0.05944824218750, -0.05883789062500]$
		x_3	$[0.02233886718750, 0.02294921875000]$
		x_4	$[0.11938476562500, 0.11999511718750]$
		x_5	$[2.36853027343750, 2.36944580078125]$
		x_6	$[0.41357421875000, 0.41479492187500]$
	#5	x_1	$[-0.17114257812500, -0.17083740234375]$
		x_2	$[-0.10369873046875, -0.10339355468750]$
		x_3	$[-0.02832031250000, -0.02786254882813]$
		x_4	$[0.05895996093750, 0.05926513671875]$
		x_5	$[2.13461303710937, 2.13507080078125]$
		x_6	$[1.44781494140625, 1.44827270507812]$

第 7 章

結論

本論文では、krawczyk を用いた方法と、線形計画法を用いた方法の全解探索について実際に実行し、線形計画法を用いたもの方が、すべての解を求めるのにより適したものを示すことが目標であった。

第 2 章では、区間演算を行う際に欠かせない区間演算の用語、そして区間演算にベクトルの考えを拡張した説明を行った。

第 3 章では、krawczyk の方法を用いれば、十分良い近似解さえ得られれば真解の包み込みが行えることを考えた。またその原理を利用すると、方程式の全解探索法ができることを示した。

第 4 章では、線形計画法の解法であるシンプレックス法と、それに精度保証をつけた方法について説明を行った。

第 5 章では、線形計画法の Phase I を用いた非存在領域の除去法を用いた全解探索法について説明した。非存在領域の除去は線形計画法を用いた方が理論的にはより良い除去法であることを示した。

第 6 章では、第 3 章、第 5 章で述べたアルゴリズムで、それぞれについて比較し検討をしてみた。

また、結果としては線形計画法の Phase I を用いたアルゴリズムの方が、実際の計算においてもずっと強力な除去法であることを示すことができ、計算時間の短縮化に貢献し、実用で使えるものにすることができ、当初の目的を達成することができた。

謝辞

本研究を進めるにあたり、終始丁寧なご指導および温かい御激励をいただき、また様々な面でもいろいろと御助言をいただき、また面倒を見てくださった柏木雅英助教授に心から深く感謝いたします。

また、卒業論文中間発表報告の際など機会のあるごとにご指導、ご鞭撻のほどを賜り、研究に方向性をくださった大石進一教授に深く感謝いたします。

また、日常生活においていろいろとお世話になり、ご助言をいただいた、柏木研究室助手の相馬隆郎さん、博士課程 2 年宮田孝富さん、博士課程 1 年の濱田吉信さん、修士課程 1 年の岩折朱希嗣さん、高崎大輔さんに深く感謝いたします。

また、同じ非線形班として意見の交換や協力などをして下さいました、柏木研究室 4 年の金谷卓充氏、川上修氏、小泉健氏、桜井幹夫氏、白井健氏、長友泰崇氏、深谷光統氏、渡部啓氏に深く感謝致します。

また、CG 班でありながらご助言をいただきました、柏木研究室 4 年の州濱陽一氏、村竹範彦氏、山田浩之氏、吉田直史氏に深く感謝致します。

最後に、研究だけでなく日常の生活の中でお世話になりました柏木研究室、大石研究室の皆様に深く感謝いたします。

参考文献

[1] Kiyotaka Yamamura, Ai tokue and Hitomi Kawata : "Interval Analysis Using Linear Programming", Technical Report of IEICE, VLD-96-6, DSP96-26, pp.37-43 (1996-06)

[2] Masahide Kashiwagi : "Simplex Method for Calculating Optimal Value with Guaranteed Accuracy", 1997 International Symposuium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA'97) Honolulu, U.S.A., Nov.29-Dec.2, 1997, pp.317-320

[3] 一森哲男："数理計画法 –最適化の手法–", 1994 共立出版

[4] 柏木雅英、大石進一："区間解析と有理数演算による非線形方程式の近似解の制度保証", 電子情報通信学会論文誌 (A), Vol.J77-A, No.10, pp.1372-1382, 1994

[5] 神沢雄智、柏木雅英、大石進一、中村晴幸 ："有限ステップで停止する非線形方程式のすべての解を精度保証付きで求めるアルゴリズム", 電子情報通信学会論文誌 A, Vol.J80-A, No.7, pp.1130-1137, 1997 年 7 月

[6] 柏木雅英："精度保証付きシュミレーション [1] – 区間解析", 日本シミレーション学会 "シミュレーション第 18 巻第 4 号", 1999 年 11 月

[7] 今野浩："線形計画法", 1987, 日科技連

[8] 山村清隆、川田仁美、徳江愛："区間解析を用いた非線形抵抗回路のすべての解を求めるアルゴリズム", 電子情報通信学会技術研究報告, NLP95-27, pp.9-15, Aug.1995